

## 목 차

논문 제목	저자(들)	쪽
군집방법을 위한 통계패키지의 비교	김순귀	1
2016년 경제협력기구 가입국가의 삶의 질에 대한 평가	정예준 · 진지민 · 정동빈	18
근삿기에 있어서 준 뉴턴 방법과 실제	김홍철	26
함의, 부정과 잔여 격자들	김경래 · 김용찬	46
졸-겔 방법으로 합성된 전기변색소자의 퍼콜레이션 현상에 의한 효과	김성희 · 최동수 · 김재화	55
음이향 분포에 관한 연구	이영훈	64
저자 안내 (Author Guides)		
[1] 논문 투고 규정		69
[2] 원고 작성 기준		70
[3] 원고 표준 양식 (Template)		72



## 군집방법을 위한 통계패키지의 비교

김 순귀\*

강릉원주대학교 자연과학대학 정보통계학과

### A Comparison of Statistical Packages for Analyzing Clustering Methods - SAS, SPSS, Stata -

Soon-kwi Kim\*

*Dept. of Information Statistics, Gangneung-Wonju National University,  
Gangneung, 25457, Korea*

**Abstract:** Clustering methods are popular in a variety of fields so that a number of statistical packages are supplied for analyzing the clustering methods. This paper briefly introduces the clustering methods, and in addition, their using and syntax of the three statistical packages(SAS, SPSS and Stata) are investigated through examples.

**요약:** 다양한 분야에서 군집방법의 수요가 증가하면서, 이를 분석하기 위한 통계패키지가 많이 보급되었다. 이 논문에서는 군집방법에 관하여 간략히 소개하고, 예를 통하여 3종류의 통계패키지인 SAS, SPSS, Stata의 명령문을 비교하고 그들의 사용에 관해 다룬다.

**Keywords:** clustering methods, Ward's method, K-means method, nonhierarchical clustering methods

---

\* Corresponding Author, E-mail: skkim@gwnu.ac.kr, Tel:+82-33-640-2277

## 1. 서론

개체나 대상들을 각 특성의 유사성(similarity)에 따라, 여러 그룹(군집 또는 집락)으로 나누는 통계기법을 군집분석이라 한다. 판별분석은 이미 알려진 그룹의 구조와 수에 따라 전체 자료를 나누어, 각 그룹에 새로운 개체 또는 그룹 식별이 안된 표본을 미리 정의된 그룹에 분류하거나 그 소속을 예측함이 목적이지만, 군집분석은 그룹에 관한 사전정보가 없는 상황(그룹의 수나 구조가 가정되지 않음)에서 유사성 또는 근접성(proximity)에 관한 그룹화이다.

본고에서는 여러 변수가 있을 경우 군집방법을 수행하기 위한, 3종류의 통계 패키지의 명령문과 기능을 살펴보고 그 특성을 비교한다.

그동안 통계 이론을 통계패키지에 연관시킨 패키지의 명령과 활용에 관한 비교 연구가 다수 있었다. 이에 관련된 논문으로 시계열 분석에 관한 패키지 비교 연구(김수화, 김승희, 조신섭, 1994), 공정관리를 위한 통계패키지의 비교에 관한 연구(조신섭, 신봉섭, 1997), 로지스틱 모형의 분석을 위한 통계패키지의 비교(김순귀, 2013), 순서 로지스틱 모형의 분석을 위한 통계패키지의 비교(김순귀, 2014) 등이 있다.

본고의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 군집방법(clustering methods)에 대해 간단히 소개하고, 3절에서는 여러 패키지 중에서 SAS, SPSS, Stata를 중심으로 군집 방법을 적용할 수 있는 명령문과 그 특성에 대해 살펴본다.

## 2. 군집방법의 소개

군집의 추출방식에는 계층적 방법(hierarchical clustering methods)과 비계층적 방법(nonhierarchical clustering methods)이 있다(이학식(2006), 허명희(2000)).

계층적 방법은 처음 각 대상(개체)이 독립군집으로 출발하여 거리가 가장 가까운 어느 두 대상이 군집을 이루기 시작하여 가까운 군집들끼리 계속적인 군집화가 이루어지는 방법이다. 이 과정에서 군집의 수가 하나씩 감소한다. 계층적 군집방법에는 최단연결법, 최장연결법, 중심연결법, 평균연결법, Ward 방법 등이 있다. 이 중에서 많이 사용하는 평균연결법과 Ward 방법에 관하여 설명하기로 한다.

비계층적 방법은 군집의 수가 하나씩 감소하는 것이 아니라 사전에 정해진 군집의 수에 따라 개체들이 군집에 할당되는 것이다. 비계층적 방법에서 가장 널리 사용하는 k-평균법(k-means)에 관하여 설명하기로 한다.

군집방법을 사용하기 위해 유클리드 거리나 민코브스키 거리를 구할 때에, 이미 모든 변수들을 표준화하였음에 유의하기 바란다. 2절에서는 군집방법(clustering methods)에 대해 간단히 소개하고, 3절에서는 여러 패키지 중에서 SAS, SPSS, Stata를 중심으로 군집방법을 적용할 수 있는 명령문과 그 특성에 대해 살펴본다.

### 2.1 계층적 방법

#### (1) 평균연결법(average linkage method)

집락과 집락 간의 거리를 구할 때, 두 집락 간의 모든 쌍들의 평균거리를 이용한다. 두 군집 간의 거리는 다음과 같다.

$$D_{ij} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij}}{N_i \times N_j}$$

(여기에서  $d_{ij}$  는 처음 군집의  $i$ -번째 개체와 두 번째 군집의  $j$ -번째 개체 간의 거리,  $N_i$  는 처음 군집의 개체 수 그리고  $N_j$  는 두 번째 군집의 개체 수를 각각 나타낸다).

(2) Ward 방법(Ward's method)

만약 군집 1 에  $n_1$ 개의 자료가 있다면, 군집 1의 오차제곱합(error sum of squares, ESS)을 다음과 같이 정의한다.

$$ESS_1 = \sum_k \sum_{j=1}^{n_1} (x_{kj} - \bar{x}_k)^2$$

(여기에서  $x_{kj}$  는 처음 군집의 k-번째 변수의 j-번째 개체에 대한 측정값, 그리고

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{kj}}{n_1}.$$

군집을 만드는 단계마다 군집의 모든 가능한 쌍들의 병합에 대하여 오차제곱합을 구한 후, 오차제곱합이 최소가 되는 두 군집을 병합시켜 새로운 군집을 만든다. 이 방법은 비슷한 크기의 군집끼리 병합하는 경향이 있다.

## 2.2 비계층적 방법

### k-평균법(k-means)

k개의 평균값에서 떨어진 거리를 구하여 분류대상이 어느 군집에 속하는 지를 밝히는 군집방법으로, 여기에서 k는 최종적으로 분류하려는 군집의 수이고, 인자분석의 인자 수와 같이 분석자가 설정한다.

- (1) 처음 시작할 때, '임의의 모든 점을 k개의 군집'으로 분류한다.
- (2) k개 중심점에서의 거리를 계산하여, 모든 점을 새롭게 재분류한다.
- (3) 재분류된 군집분류에 기초하여, 다시 평균을 구하여 중심점을 구한다. 모든 점을 새롭게 재분류한다.
- (4) 최종적으로 중심점도 분류도 변하지 않으면, 그 시점의 분류가 '좋은 군집 결과'이다.

'최종적으로 어떤 군집으로 나뉘었는지'를 파악하려면, 각 군집내의 점의 수, 중심점, 분석에 사용한 변수의 평균값을 확인한다.

### 3. 예를 통한 통계 패키지의 명령문

앞 절에서는 군집방법에 관한 기본 이론을 정리하였고, 이 절에서는 통계 패키지 SAS 9.4, SPSS 23, Stata 12를 중심으로 자료를 이용하여 군집방법을 사용하기 위한 통계패키지의 명령문을 제시한다.

다음의 판매원 성적 자료에 대하여, 군집방법을 적용하기 위하여 Stata, SAS와 SPSS를 각각 사용하여 분석하여 보자.

1. 자료 이름 : 판매원 성적 자료
2. 크기 : n=10 observations, 2 variables
3. 출처 : 이학식(2006), p389
4. 변수 코드

변수 이름	변수 의미	변수값 의미
rrelation	사교성	100점 척도
rscore	직무성적	100점 만점

#### 5. 판매원 성적 자료

	rrelation	rscore
1	23.00	57.00
2	48.00	93.00
3	57.00	76.00
4	40.00	88.00
5	45.00	82.00
6	42.00	85.00
7	58.00	86.00
8	47.00	74.00
9	32.00	64.00
10	36.00	72.00

#### 표준화된 판매원 성적 자료

	relation	score
1	-1.83698	-1.83434
2	0.48244	1.35582
3	1.31743	-0.15065
4	-0.25977	0.91274
5	0.20411	0.38105

6	-0.07422	0.64689
7	1.41020	0.73551
8	0.38966	-0.32788
9	-1.00199	-1.21403
10	-0.63088	-0.50511

### 3. 1 계층적 군집방법

계층적 군집방법 중 Ward 방법을 사용하는, 각 패키지의 명령과 그 결과의 일부는 다음과 같다.

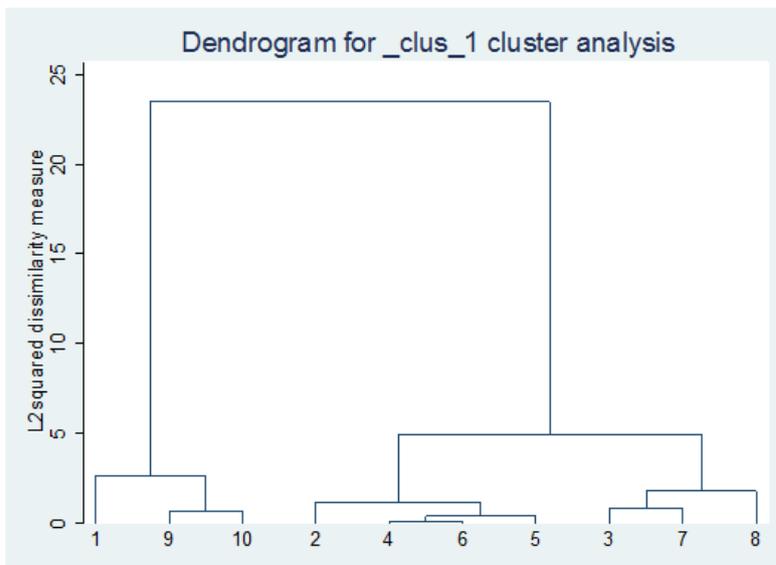
#### (1) Stata 명령과 결과

```
. cluster wardslinkage relation score, measure(L2squared)
cluster name: _clus_1
```

: 변수 relation와 score를 이용하여 군집분석을 하라는 명령인데, 계층적 군집방법 중 Ward 방법을 사용하라는 명령이다.

```
. cluster dendrogram _clus_1
```

: 덴드로그램을 산출하라는 명령이다.



(2) SAS 명령과 결과

```
Proc cluster data=salestd method=Ward Out=result ;
Var relation score ;
run;
```

: 변수 relation와 score를 이용하여 군집분석을 하라는 명령인데, 계층적 군집방법 중 Ward 방법을 사용하라는 명령이다(표준화된 자료를 이용하여).

```
Proc Tree data=result ;
Copy relation score ; Run ;
```

: 덴드로그램을 산출하라는 명령이다.

The CLUSTER Procedure  
Ward's Minimum Variance Cluster Analysis

Eigenvalues of the Covariance Matrix

	Eigenvalues	Differences	Proportion	Cumulative
1	1.67361087	1.34722175	0.8368	0.8368
2	0.32638913		0.1632	1.0000

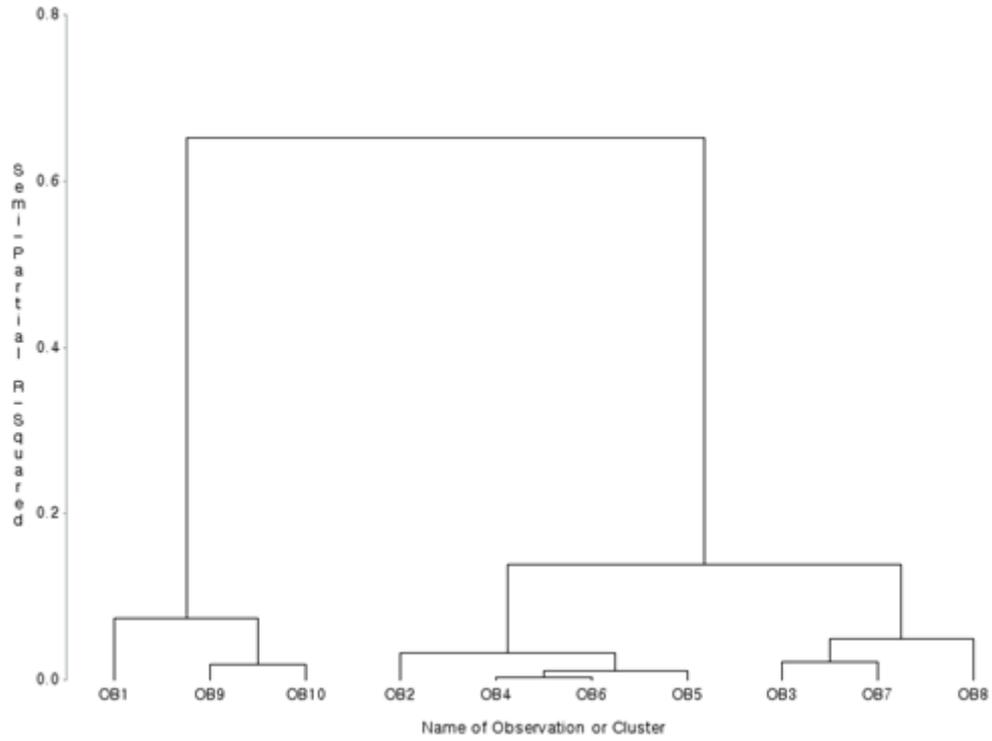
Root-Mean-Square Total-Sample Standard Deviation 1

Root-Mean-Square Distance Between Observations 2

Cluster History

Number of Clusters	Clusters	Joined	Freq	Semipartial R-Square	R-Square	Tie
9	OB4	OB6	2	0.0029	.997	
8	CL9	OB5	3	0.0110	.986	
7	OB9	OB10	2	0.0178	.968	
6	OB3	OB7	2	0.0221	.946	
5	OB2	CL8	4	0.0325	.914	
4	CL6	OB8	3	0.0494	.864	
3	OB1	CL7	3	0.0738	.791	
2	CL5	CL4	7	0.1381	.653	
1	CL3	CL2	10	0.6526	.000	

The TREE Procedure  
Ward's Minimum Variance Cluster Analysis



(3) SPSS 명령과 결과

( i ) SPSS 메뉴상자에서

분석 > 분류분석 > 계층적 군집

을 선택한다.

( ii ) 다음 그림의 [계층적 군집분석] 상자에서

변수선택(변수 relation과 score)

군집분석(케이스를 선택)

표시(통계량, 도표를 선택)

를 각각 넣은 후,

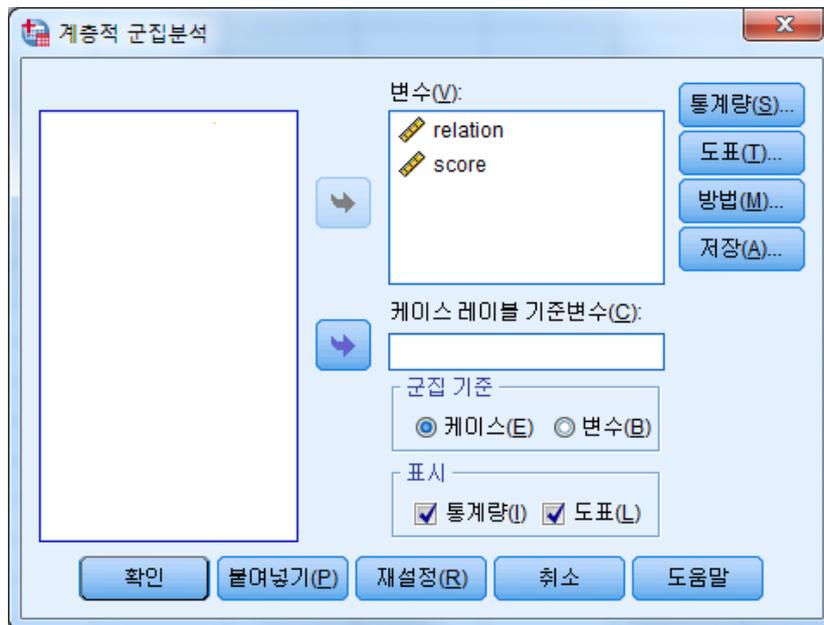
통계량 tab( 군집화일정표, 군집행렬 에 표기)

도표 tab(덴드로그램에 표기)

방법 tab(군집방법(Ward의 방법), 구간에 표시(제공유클리디안 거리))

를 선택한 후 계속, 확인을 눌러 실행하면 된다.

[계층적 군집분석] 상자



[데이터세트1] C:\Users\Wksh\Desktop\Wstd10.sav

케이스 처리 요약<sup>a,b</sup>

케이스					
유효		결측		전체	
N	퍼센트	N	퍼센트	N	퍼센트
10	100.0	0	.0	10	100.0

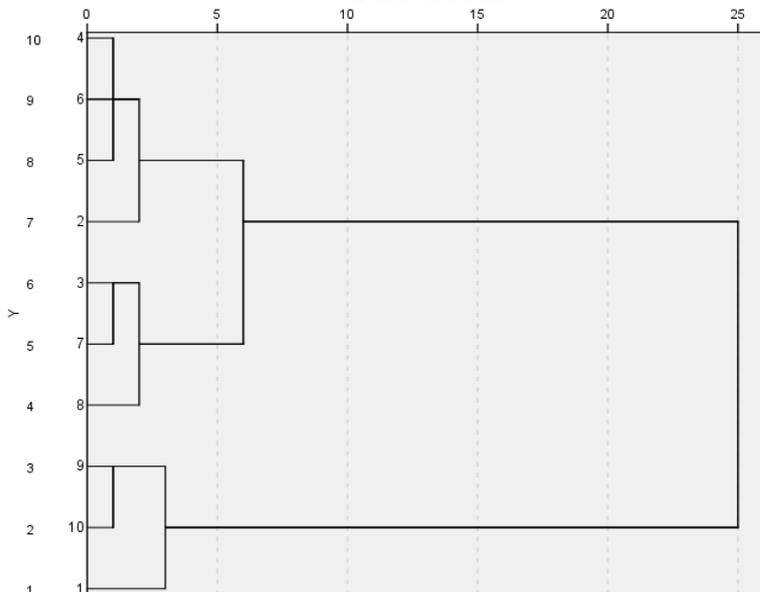
- a. 제공 유클리디안 거리 사용됨
- b. Ward 연결법

Ward 연결법

군집화 일정표

단계	결합 군집		계수	처음 나타나는 군집의 단계		다음 단계
	군집 1	군집 2		군집 1	군집 2	
1	4	6	.053	0	0	2
2	4	5	.250	1	0	5
3	9	10	.571	0	0	7
4	3	7	.967	0	0	6
5	2	4	1.552	0	2	8
6	3	8	2.441	4	0	8
7	1	9	3.769	0	3	9
8	2	3	6.254	5	6	9
9	1	2	18.000	7	8	0

Ward 연결법을 사용한 덴드로그램  
재적도화 거리 군집 조급



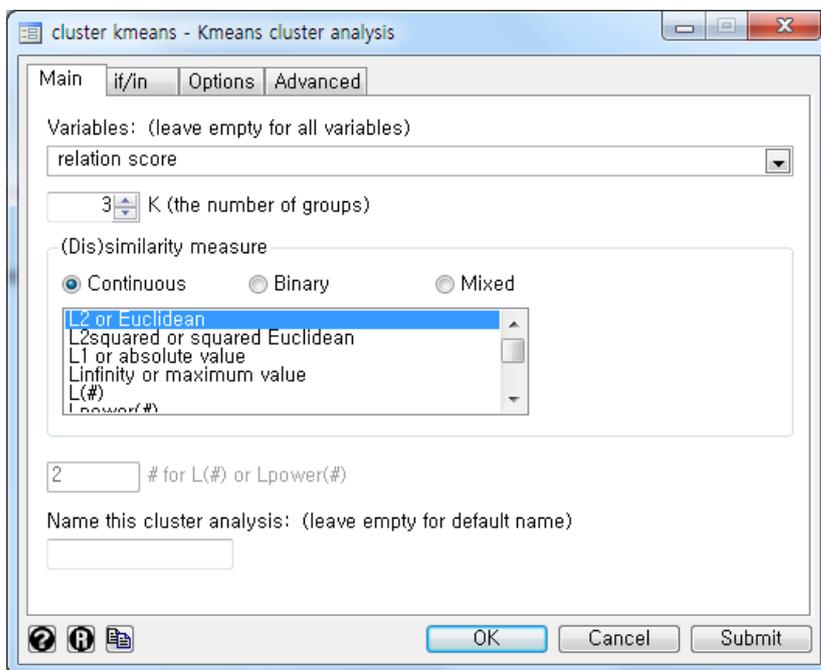
### 3. 2 비계층적 군집방법

비계층적 군집방법 중 k-means 방법을 사용하는, 각 패키지의 명령과 그 결과의 일부는 다음과 같다.

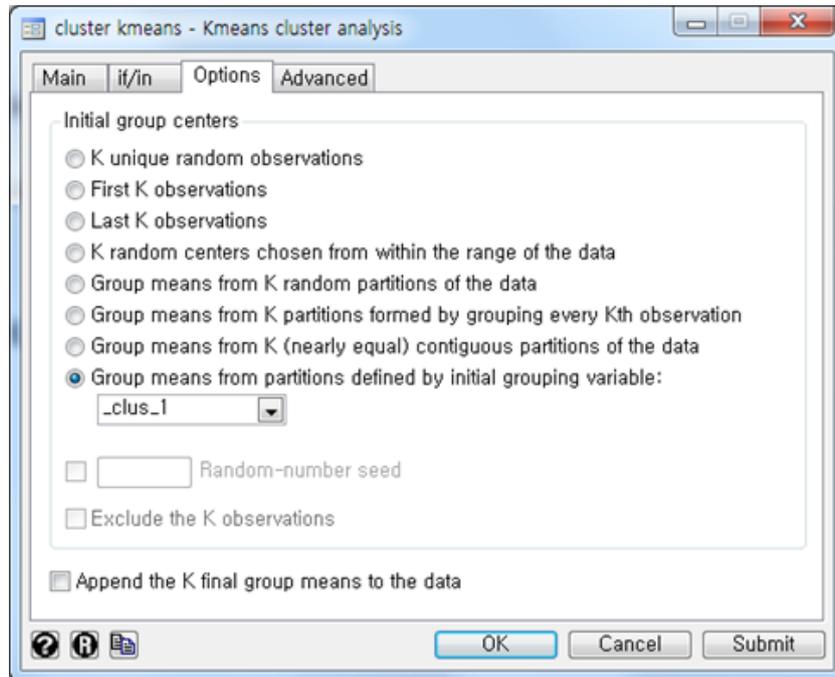
(1) Stata 명령과 결과

Statistics --> Multivariate analysis --> Cluster analysis --> Cluster data --> Kmeans를 누르면, 다음 창이 나온다. 다음 cluster kmeans상자에서

the number of groups(3), L2 or Euclidean



을 고른 후, Options tab을 누른다. 다음 창에서 적당한 곳에 표기한 후, 확인을 눌러 실행하면 된다.



```
. cluster kmeans relation score, k(3) measure(L2) start(group(_clus_1))
cluster name: _clus_2
```

: 여기에서는 초기값으로 변수 \_clus\_1 의 값(1, 2, 3)을 이용하여, 다음의 결과를 얻는다.

. l

id	relation	score	_clus_1	_clus_2
1.	1	-1.83698	-1.83434	3
2.	2	.48244	1.35582	2
3.	3	1.31743	-.15065	1
4.	4	-.25977	.91274	2
5.	5	.20411	.38105	2
6.	6	-.07422	.64689	2
7.	7	1.4102	.73551	1
8.	8	.38966	-.32788	1
9.	9	-1.00199	-1.21403	3
10.	10	-.63088	-.50511	3

(2) SAS 명령과 결과

```
Proc Fastclus data=salestd Maxiter=10 Maxclusters=3 Out=result ;
  Var relation score ;
Run ;
```

```
Proc Print; Run;
```

The FASTCLUS Procedure  
 Replace=FULL Radius=0 Maxclusters=3 Maxiter=10 Converge=0.02

Initial Seeds			
Cluster	relation	score	
1	-1.836976742	-1.834342143	
2	-0.259774489	0.912740294	
3	1.317427764	-0.150646456	

Minimum Distance Between Initial Seeds = 1.902198

Iteration History				
Iteration	Criterion	Relative Change in Cluster Seeds		
		1	2	3
1	0.5597	0.2734	0.2150	0.1919
2	0.4738	0	0	0

Convergence criterion is satisfied.

Criterion Based on Final Seeds = 0.4738

Cluster Summary							
Cluster	Frequency	RMS Deviation	Std	Maximum Distance from Seed to Observation	Radius Exceeded	Nearest Cluster	Distance Between Cluster Centroids
1	2	0.5201		0.5201		2	2.4893
2	5	0.5768		1.2090		3	1.1924
3	3	0.5670		0.7699		2	1.1924

Statistics for Variables				
Variable	Total STD	Within STD	R-Square	RSQ/(1-RSQ)
relation	1.00000	0.49504	0.809392	4.246362
score	1.00000	0.62943	0.691854	2.245210

OVER-ALL      1.00000      0.56624      0.750623      3.009987

Pseudo F Statistic =      10.53

Approximate Expected Over-All R-Squared =      .

Cubic Clustering Criterion =      .

WARNING: The two values above are invalid for correlated variables.

Cluster Means

Cluster	relation	score
1	-1.419482028	-1.524187675
2	-0.055665962	0.558278044
3	1.039097955	0.085661710

Cluster Standard Deviations

Cluster	relation	score
1	0.5904266868	0.4386246560
2	0.4271755605	0.6949403943
3	0.5643380452	0.5697183577

Obs	relation	score	CLUSTER	DISTANCE
1	-1.83698	-1.83434	1	0.52009
2	0.48244	1.35582	2	0.96209
3	1.31743	-0.15065	3	0.36512
4	-0.25977	0.91274	2	0.40903
5	0.20411	0.38105	2	0.31447
6	-0.07422	0.64689	2	0.09054
7	1.41020	0.73551	3	0.74835
8	0.38966	-0.32788	3	0.76992
9	-1.00199	-1.21403	1	0.52009
10	-0.63088	-0.50511	2	1.20899

(3) SPSS 명령과 결과

( i ) SPSS 메뉴상자에서

분석 > 분류분석 > k-평균 군집

을 선택한다.

( ii ) 다음의 [k-평균 군집분석] 상자에서

변수선택(변수 relation과 score)

군집 수(3)

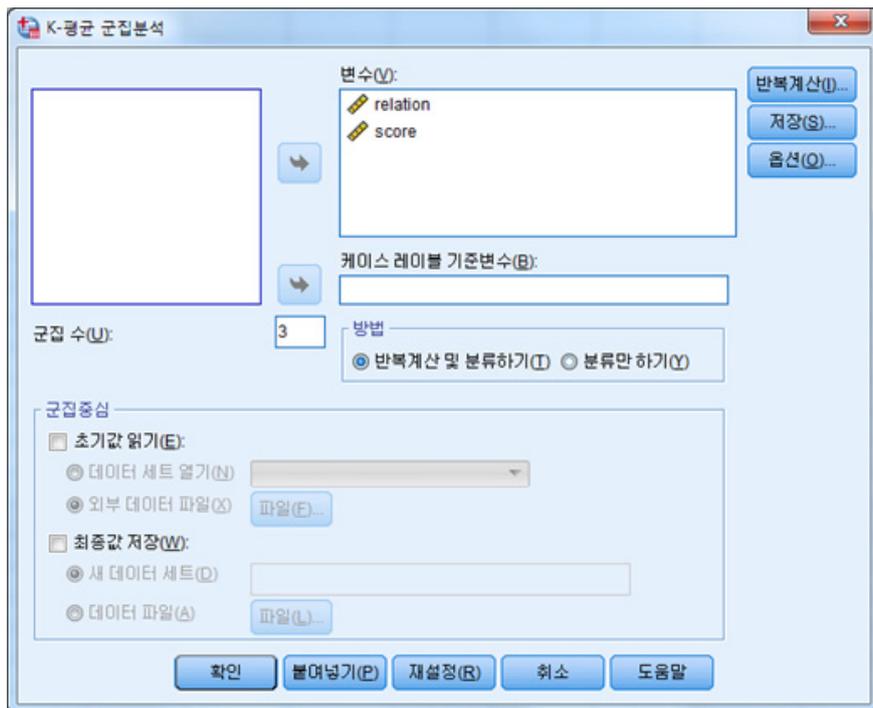
방법(반복계산 및 분류하기)

를 각각 넣은 후,

옵션 tab( 군집중심초기값과 각 케이스의 군집정도에 표기)

를 선택한 후 계속, 확인을 눌러 실행한다.

[k-평균 군집분석] 상자



군집중심초기값

	군집		
	1	2	3
relation	-1.83698	-.25977	1.31743
score	-1.83434	.91274	-.15065

소속군집

케이스 번호	군집	거리
1	1	.520
2	2	.962
3	3	.365
4	2	.409
5	2	.314
6	2	.091
7	3	.748
8	3	.770
9	1	.520
10	2	1.209

최종 군집중심

	군집		
	1	2	3
relation	-1.41948	-.05566	1.03910
score	-1.52419	.55828	.08566

최종 군집중심간 거리

군집	1	2	3
1		2.489	2.939
2	2.489		1.192
3	2.939	1.192	

각 군집의 케이스 수

군집	1	2.000
	2	5.000
	3	3.000
유효		10.000
결측		.000

#### 4. 결론

앞에서 살펴본 세 통계패키지 모두 군집방법을 수행하는 기능을 가지고 있다.

군집방법 수행 시, SAS는 다양한 입력 옵션과 통계량의 출력결과를 제공하였고, SPSS는 완전 메뉴 방식을 채택하여 손쉽게 접근할 수 있는 장점을 갖추었다. Stata 역시 메뉴 방식 뿐 아니라 다양한 명령문을 통하여 통계량을 제공하였다.

계층적 군집방법 중 Ward 방법을 사용한 결과, 3종류의 패키지 모두 동일한 덴드로그램을 산출하였음을 확인할 수 있다. 비계층적 군집방법 중 k-means 방법을 사용한 결과, SAS 와 SPSS는 동일한 결과를 산출하였으나, 10번째 관측값인 경우 Stata 만이 다른 결과를 보였다. 이는 Stata 만이 초기 군집 중심값을 다르게 잡은 이유에 기인할 것이다.

시간이 지나면서 어느 한 패키지의 기능을 다른 패키지에서 마련하는 모습을 보이지만, 각 패키지마다 고유의 기능이 있으므로 가능하다면 한 패키지에 의존하지 말고, 둘 이상의 패키지를 사용하여 패키지들의 사용법과 결과를 비교하면서 사용하기를 권장한다.

#### 참고문헌

- [1] Kim, S. K (2013), “로지스틱 모형의 분석을 위한 통계패키지의 비교”, *The Journal of Natural Science Research Institute* 19 : 75-87.
- [2] Kim, S. K (2014), “순서 로지스틱 모형의 분석을 위한 통계패키지의 비교”, *The Journal of Natural Science Research Institute* 20 : 10-20.
- [3] 김수화, 김승희, 조신섭(1994). 통계패키지에서의 시계열 분석방법의 비교연구, <한국통계학회논문집>, 제1권 1호, 119-130.
- [4] 이학식(2006). *마케팅 조사*, 법문사.
- [5] 조신섭, 신봉섭(1997). 통계적 공정관리를 위한 주요 통계패키지의 비교, <응용통계연구>, 제10권 1호, 29-36.
- [6] 허명희(2000). *사회과학을 위한 다변량 자료분석*, 자유아카데미

## 2016년 경제협력기구 가입국가의 삶의 질에 대한 평가

정예준<sup>1)</sup> · 진지민<sup>2)</sup> · 정동빈<sup>3)\*</sup>

<sup>1)</sup>한국무역협회 미주실

<sup>2)</sup>한국무역협회 무역아카데미 무역연수실

<sup>3)</sup>강릉원주대학교 자연과학대학 정보통계학과

## Assessment on Quality of Life of OECD countries in 2016

Ye-Joon Chung<sup>1)</sup>, Ji-Min Jin<sup>2)</sup>, Dong-Bin Jeong<sup>3)\*</sup>

<sup>1)</sup>*Americas Department, Korea International Trade Association, 47<sup>th</sup> Fl,  
Trade Tower, Seoul 06164, Korea*

<sup>2)</sup>*Trade Education Department, World Trade Academy, Korea International  
Trade Association, Coex Office 4th Fl, Seoul 06164, Korea*

<sup>3)\*</sup>*Dept. of Information Statistics, Gangneung-Wonju National University,  
Gangneung, 25457, Korea*

**Abstract:** Multivariate analyses carried out in this paper are based on the 17 'quality of life' criteria in 38 ones, including 35 OECD countries. We categorize and segment 38 countries based on dissimilarity and grouping by using cluster analysis. Hence, 38 countries can be categorized into four distinct clusters, and relatively homogeneous traits of 38 countries can be assessed within and between clusters. Additionally, multidimensional scaling method can get visual display for detecting the pattern of proximities among 38 countries based on 17 quality of life attributes, so that relative superiority among countries can be compared.

---

\* Corresponding Author. E-mail: dj@gwnu.ac.kr, Tel: +82-33-640-2280.

이 논문은 강릉원주대학교 자연과학연구소의 지원을 받아 작성되었음.

**요약:** 본 연구는 35개 경제협력기구 가입국가를 포함한 38개국을 대상으로 17개의 삶의 질을 나타내는 평가변수를 사용하여 다변량분석(군집분석 및 다차원척도법)을 실시하였다. 군집분석을 사용하여 비유사성과 군집화에 근거하여 38개국을 분류 및 세분화하였다. 그 결과 38개국은 네 개의 군집으로 뚜렷하게 분류할 수 있으며, 상대적으로 군집 내 및 군집 간 동질적인 특성을 평가할 수 있다. 추가로 다차원척도법을 사용하여 17개의 삶의 질 평가속성에 근거하여 38개국 사이의 근접성의 양상을 시각적으로 표현하여 상대적인 우위를 비교할 수 있다.

**Keywords :** 경제협력기구(OECD), 삶의 질, 군집분석, 다차원척도법

## 1. 서론

삶의 질(quality of life)은 인간 개개인이 삶에 대한 객관적 및 주관적으로 인식과 평가에 대한 만족도 즉, 인간의 복지나 행복의 정도(웰빙, well-being)를 의미한다. 특히 정신적인 면에서는 스트레스, 걱정이 없고 즐거움이 충만함을, 물질적으로는 건강, 섭생 및 무고통 등으로 이해할 수 있다(위키백과). 따라서 이를 만족하기 위해서는 주거지, 기초생활비, 직업, 여가 등 기본적인 생활조건과 함께 대인관계, 관심, 사랑 및 자존감 등 심리적 욕구가 필요불가분할 것이다. 최근 비약적인 물질적인 융성과 함께 내적인 만족감에 더 많은 비중을 둔 주관적인 지표와 이에 부흥하여 고통없이 준비된 죽음을 의미하는 well-dying 또한 그 중요성에 많은 초점을 두고 있는 실정이다.

최근 경제협력기구(Organization for European Co-operation and Development, OECD) 가입 35개국 중 한국의 삶의 질은 27번째에 해당한다. 안전과 교육영역에서는 큰 점수를, 반면에 장시간의 노동시간 및 심각한 소득격차로 인한 박탈감 등에서 초래되는 생활균형, 건강 및 삶의 만족도 등에 해당하는 정신적인 면에서는 최하위권에 머물고 있다.

본 연구에서는 OECD에 가입한 35개 국가와 추가 3개국(러시아, 브라질, 남아프리카공화국)을 포함한 총 38개 나라에 대해서 17개의 평가항목변수(주택비용, 1인당 방수, 가계 가처분소득, 가계금융자산, 고용률, 장기 실업률, 개인소득, 교육수준, 학생능력, 교육 년, 대기오염, 수질, 투표율, 수명, 자각 건강, 삶이 만족도, 1인당 여가 시간)를 중심으로 군집분석에 적용시켜 유사성에 근거한 동질적인 집단으로 분류한다. 그리고, 세분화된 각 군집에 속한 국가들의 특성을 파악하고 한국의 현주소와 향후 개선 및 추진 방향을 제시하는 데 그 중요도가 있을 것이다.

정동빈과 김신정(2015)은 국내 29개 공기업을 대상으로 임원봉급, 부채, 영업이익 등 양적평가속성을 사용하여 군집분석을 실시하였다. 그 결과 다섯 개의 군집으로 세분화하여 유형화가 가능함을 알게 되었고, 특히, 한국동서발전, 해양환경관리공단은 다른 군집에 비해 부채가 월등이 많고 반면에 영업이익과 매출이 부진한 군집에

속해 내적변화 및 혁신이 시급함을 제시하였다.

정동빈(2014)은 국내 28개 국공립대학교를 대상으로 대학정보공시제에서 제시한 네 개의 우량성 속성을 연구성과 지표로 고려하여 각 대학을 다차원 공간상에 시각적으로 배치시켰다. 그 결과 대부분의 거점 국립대학은 1인당 연구비 수혜금액과 1인당 SCI/SCOPUS급 실적에서, 공주대, 부경대, 안동대, 한국교원대, 한국해양대는 1인당 KCI 및 저역서 실적에 우위에 있음을 밝혀냈다.

2장에서는 삶의 질에 연관된 17개 평가항목변수들을 근거로 단계적 2단계 군집분석을 이용하여 세분화를 실행함으로써, 동일군집에 속한 국가들의 특성을 파악할 수 있으며 다른 군집 간 상대적 순위와 방향성을 비교한다. 또한 국가 간 유사성을 근거로 그들 간의 상대적 거리를 2차원 평면에 표현하여 어떤 이미지 속성이 있는지 시각적으로 탐색한다. 마지막으로 3장에서는 연구결과를 정리하고 결론을 정리하였다.

## 2. 연구결과

### (1) 군집분석

#### 1) 계층적 군집방법(SPSS, 1999)

군집화 일정표 <표 1>에서 계수가 네 개의 시점(33단계부터 37단계까지)에서 급격히 증가하는 변화가 감지되는 것을 발견할 수 있기 때문에 네 개 군집으로 유형화할 수 있다.

#### 2) K-평균 군집방법(Everitt, 2014; Uprichard, 2012:)

##### ① 소속군집과 최종군집중심

각 네 개의 군집에 대한 17개의 평가항목변수의 평균값을 비교하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다(<표 2> 참고).

- K-평균 군집방법을 사용하여 다음과 같이 네 개의 군집으로 세분화 할 수 있다.
  - 군집 1(한국, 이스라엘, 일본, 칠레, 체코, 에스토니아, 헝가리, 라트비아, 폴란드, 러시아, 슬로베니아)
  - 군집 2(그리스, 이탈리아, 포르투갈, 슬로바키아, 스페인)
  - 군집 3(캐나다, 미국, 오스트리아, 벨기에, 덴마크, 핀란드, 프랑스, 독일, 아이슬란드, 아일랜드, 룩셈부르크, 네덜란드, 노르웨이, 스웨덴, 스위스, 영국, 호주, 뉴질랜드)
  - 군집 4(터키, 멕시코, 브라질, 남아프리카공화국)
- 군집 3은 북미, 유럽, 오세아니아에 속한 국가들, 군집 1은 유럽 일부와 아시아에 속한 국가들, 군집 2는 주로 남유럽에 위치한 국가로 구성되어있다.

- 군집 4에 속한 국가들은 나머지 군집에 속한 국가들에 비해 삶에 질을 평가하기 위한 대다수의 평가속성에 대해서 열악한 위치에 놓여있으며, 특히 1인당 방수, 가계 가처분소득, 개인소득, 학생능력, 교육 년, 수질, 수명, 1인당 여가시간 면에서 더 심각하게 그 열등함이 나타난다.
- 반면에 군집 3에 속한 국가들은 거의 모든 평가속성에 대해 우위에 있으며, 특히, 1인당 방수, 가계 가처분소득, 가계금융자산, 고용률, 개인소득, 대기오염, 수질, 삶 만족도 및 자각 건강 등과 같이 경제적 요소, 환경 및 정신적 요소에 우월함이 두드러짐을 확인할 수 있다.
- 한국이 포함된 군집 1은 다른 군집에 비해 대기오염, 투표율, 자각 건강이 열악한 반면에 장기 실업률, 주택비용 및 교육수준은 우위에 있음을 알 수 있다.
- 주로 남유럽에 위치한 국가로 구성된 군집 2는 수명이 다른 군집에 비해 우수하지만, 고용률, 장기실업률, 주택비용 및 삶 만족도는 열세이다.

<표 1> Agglomeration schedule

단계	결합 군집		계수	처음 나타나는 군집의 단계		다음 단계
	군집 1	군집 2		군집 1	군집 2	
1	10	17	3.157	0	0	3
2	19	27	4.177	0	0	9
3	10	35	4.812	1	0	7
4	33	37	4.859	0	0	10
5	5	38	5.694	0	0	21
6	14	31	6.052	0	0	9
7	10	25	6.155	3	0	14
8	12	30	6.233	0	0	13
9	14	19	6.675	6	2	18
10	26	33	6.744	0	4	15
11	13	15	7.227	0	0	15
12	22	32	8.036	0	0	23
13	12	23	8.066	8	0	18
14	10	16	8.162	7	0	19
15	13	26	9.207	11	10	17
16	6	8	9.415	0	0	26
17	13	20	9.643	15	0	22
18	12	14	10.149	13	9	25
19	10	11	10.276	14	0	20
20	10	21	10.830	19	0	21
21	5	10	11.679	5	20	22
22	5	13	13.438	21	17	27
23	18	22	14.542	0	12	31
24	7	34	14.981	0	0	29
25	9	12	16.253	0	18	28
26	4	6	16.261	0	16	35
27	5	24	17.631	22	0	29
28	9	28	18.882	25	0	31
29	5	7	22.032	27	24	34
30	1	3	23.553	0	0	33
31	9	18	23.616	28	23	32
32	2	9	27.795	0	31	33
33	1	2	30.383	30	32	34
34	1	5	33.849	33	29	37
35	4	36	46.900	26	0	36
36	4	29	51.273	35	0	37
37	1	4	60.113	34	36	0

<표 2> Final clustering centers

	군집			
	1	2	3	4
표준화 점수(주택비용)	-.36759	.79077	.04881	-.19724
표준화 점수(1인당 방수)	-.63266	-.32849	.80586	-1.47594
표준화 점수(가계 가처분소득)	-.66138	-.37762	.84399	-1.50714
표준화 점수(가계금융자산)	-.49822	-.43462	.64152	-.97348
표준화 점수(고용률)	-.00058	-1.09394	.61238	-1.38668
표준화 점수(장기실업률)	-.27027	1.82378	-.37357	.14455
표준화 점수(개인소득)	-.62866	-.49107	.89298	-1.67576
표준화 점수(교육수준)	.62817	-.81085	.27527	-1.95262
표준화 점수(학생능력)	.25614	-.28847	.40581	-2.16997
표준화 점수(교육년)	-.14263	-.03395	.40914	-1.40645
표준화 점수(대기오염)	.65328	.07197	-.47096	.23283
표준화 점수(수집)	-.49195	-.56279	.73115	-1.23382
표준화 점수(투표율)	-.80783	-.39761	.51220	.41362
표준화 점수(수명)	-.23326	.35006	.44173	-1.78390
표준화 점수(자각건강)	-1.00078	-.20229	.66546	.01044
표준화 점수(삶만족도)	-.61061	-.89236	.83235	-.95096
표준화 점수(1인당 여가시간)	-.19695	.28598	.41154	-1.66780

② 군집중심간 거리와 분산분석

- 각 군집 간 평균차를 살펴보면, 여섯 개의 군집 조합 중 (군집 3과 군집 4)가 다른 군집들에 비해서 상대적으로 가장 큰 값을 가지므로 이질적인 집단임을 알 수 있다. 반면에 (군집 1과 군집 2)는 다른 군집 조합들에 비해 상대적으로 가장 가까운 거리에 있음을 알 수 있다(<표 3>참고).

<표 3> Distances between final cluster centers

군집	1	2	3	4
1		3.361	4.376	5.190
2	3.361		4.749	4.945
3	4.376	4.749		7.511
4	5.190	4.945	7.511	

- 17개 평가항목변수에 대해 세 개의 집단별 평균차 검정을 한 것으로 ‘주택비용(p 값=0.187)’을 제외한 16개 변수 모두 네 개 집단 분류에 유의한 변수임을 확인할 수 있다(<표 4> 참고).
- 특히 ‘가계금융자산, 교육 년, 대기오염, 투표율’을 제외한 나머지 평가속성들에 비해서 매우 작은 p값을 가지므로(p값 < 0.001), 네 개 군집에 대한 차이가 크게 식별되고 있다.

<표 5> Analysis of variance

	군집		오차		F	유의확률
	평균제곱	자유도	평균제곱	자유도		
표준화 점수(주택비용)	1.604	3	.947	34	1.694	.187
표준화 점수(1인당방수)	8.448	3	.343	34	24.646	.000
표준화 점수(가계가처분소득)	9.144	3	.281	34	32.496	.000
표준화 점수(가계금융자산)	4.958	3	.651	34	7.618	.001
표준화 점수(고용률)	6.808	3	.487	34	13.966	.000
표준화 점수(장기실업률)	6.677	3	.499	34	13.377	.000
표준화 점수(개인소득)	10.380	3	.172	34	60.217	.000
표준화 점수(교육수준)	8.081	3	.375	34	21.537	.000
표준화 점수(학생능력)	7.646	3	.414	34	18.485	.000
표준화 점수(교육년)	3.718	3	.760	34	4.892	.006
표준화 점수(대기오염)	2.977	3	.826	34	3.605	.023
표준화 점수(수질)	6.653	3	.501	34	13.272	.000
표준화 점수(투표율)	4.459	3	.695	34	6.417	.001
표준화 점수(수명)	5.818	3	.575	34	10.119	.000
표준화 점수(자각건강)	6.398	3	.524	34	12.216	.000
표준화 점수(삶만족도)	8.057	3	.377	34	21.353	.000
표준화 점수(1인당여가시간)	5.003	3	.647	34	7.736	.000

(2) 다차원척도법

아래 주어진 <그림 1>은 2차원 공간상에서 고려한 38개 국가들이 위치할 상대적 좌표를 계산한 후 산점도로 나타낸 것이다.

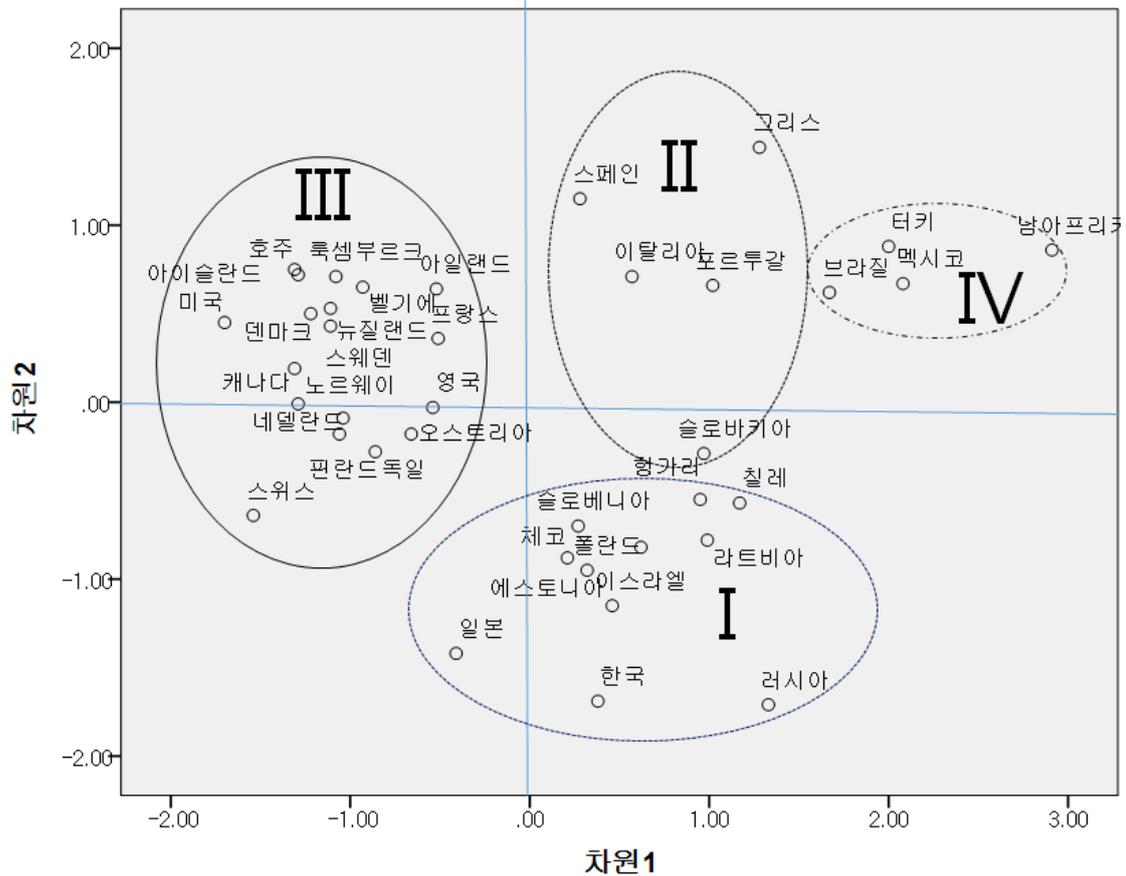
각 속성들이 원점에서 가로축 또는 세로축으로 떨어질수록 각 평가속성이 강하게 드러난다. 그리고 각 평가속성과 국가 사이의 관계를 수직 또는 수평으로 움직일 때 가깝게 위치한 국가일수록 평가속성의 특징을 많이 가진 국가로 판단할 수 있다. <그림 1>에 표시된 I, II, III, IV는 군집분석에서 분류한 네 개의 군집을 나타낸 것이며, 네 개의 타원은 이를 시각적으로 집단화시킨 것이다.

17개의 평가속성 중 세로축 위로 갈수록 고용률, 주택비용, 장기실업률이 아래로 갈수록 교육수준 및 대기오염이 강한 것으로 식별할 수 있다. 반면에 가로축의 오른쪽으로 갈수록 1인당 방수, 가계가처분소득, 가계금융자산, 개인소득, 교육년, 수질 및 삶 만족도가 약하게 나타난다.

이러한 사실에 근거하며 한국의 현 위치를 보면, 교육수준과 대기오염이 다른 나라에 비해 아주 두드러진 반면에, 고용률, 주택비용, 장기실업률에 대해서는 상대적으로 큰 고통을 받지 않는 것으로 판단된다.

1인당 방수, 가계가처분소득, 가계금융자산, 개인소득, 교육년, 수질 및 삶 만족도의 평가속성 면에서 고려하면, 한국과 함께 군집 1에 속해 있는 일본의 경우, 군집 3이 포함된 유럽선진국만큼은 아니더라도 군집 3에 속한 서유

럽선진국들, 북유럽, 오세아니아에 위치한 국가들과 거의 동일한 속성을 가지며, 반면에 러시아, 그리스, 칠레 등은 군집 4에 속한 열약성과 동질성을 가지는 것을 확인할 수 있다.



<그림 1> Derived stimulus configuration

### 3. 결론

본 연구는 삶에 질에 영향을 주는 사회문화적 측면, 경제적 측면, 정치적 측면, 교육적 측면, 환경적 측면, 정신적 측면을 고려한 17개의 양적 평가변수에 근거하여 경제협력기구에 속한 국가를 포함한 38개 국가를 두 단계의 군집분석에 각각 적용시켜, 38개의 국가를 유사성이 있는 네 개의 군집으로 분류 및 세분화하였다. 참고로, 여기에서 고려한 삶의 질의 17개 평가항목변수들의 관측척도가 다르기 때문에 평균이 0, 표준편차가 1인 z 스코어로 표준화시켰다.

삶의 질을 평가하는 17개 항목변수(주택비용, 1인당 방수, 가계가처분소득, 가계금융자산, 고용률, 장기실업률, 개인소득, 교육수준, 학생능력, 교육 년, 대

기오염, 수질, 투표율, 수명, 자각건강, 삶 만족도, 1인당 여가시간)에 근거하여 군집 3에 속한 서유럽 선진국가들, 북미 2개국 및 오세아니아 2개국은 거의 모든 평가항목에서 우위에 있으며, 반면에 군집 4에 속한 국가(터키, 남아프리카 공화국, 멕시코, 브라질)는 열세에 있다. 특히 평가항목속성 중 1인당 방수, 가계가처분소득, 가계금융자산, 개인소득, 교육 년, 수질 및 삶 만족도 면에서 군집 1과 군집 2는 군집 3과 군집 4의 중간 위치에 놓여 있다고 판단된다.

2015년 OECD 삶의 질(How's life?) 보고서에 따르면 한국인의 만족도는 10점 만점에 5.80점으로 평균(6.58)보다 낮았으며, OECD 34개국 중 17위에 머물렀다(연합뉴스, 2015). 앞에서 살펴본 바와 같이, 교육수준, 장기실업률 면에서는 OECD에서 가장 우수한 점을 제외하고는 소위 말하는 선진국들과 비교했을 때 거의 모든 평가항목에서 상대적으로 열세에 있음을 확인하였다. 이러한 점은 경제발전을 그 동안 어느 정도 이루어져 물질적 삶의 차원이 나아졌음을 인식했음에도 여전히 주관적 만족 및 질적 수준 차원의 삶의 질은 개선되지 않음을 반영한다.

본 연구를 통해서 여러 삶의 질을 나타내는 평가항목지표들을 OECD 국가들과 그 우위를 파악 및 비교함으로써 열성에 있는 지표는 향상시키는 것은 장기적인 국가발전 및 복지 증진 등에 관련된 의사결정에 많은 도움을 줄 것으로 기대하며, 이는 국가경쟁력에 공헌할 것으로 믿는다.

#### 4. 참고문헌

정동빈, 김신정(2015) 국내공기업 재정평가속성에 대한 분류분석. *강릉원주대학교 자연과학연구소 논문집*. 제21권 1호 : 1-9.

정동빈(2014) 국내 25개 국공립대학교의 연구성과에 대한 평가. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*. 제25권 6호 : 1241-1251.

Brian S. Everitt(2014) *Cluster Analysis*, Wiley.

SPSS Inc. (1999) *SPSS Base 10.0 Application Guide*.

Emma Uprichard(2012) *Cluster Analysis*. Sage Pub.

[https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%82%B6%EC%9D%98\\_%EC%A7%88](https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%82%B6%EC%9D%98_%EC%A7%88)

<https://www.oecd.org/social/how-s-life-measuring-what-matters-for-better-policies-and-better-lives.htm>

## 근찾기에 있어서 준 뉴턴 방법과 실제

김홍철\*

강릉원주대학교 자연과학대학 수학과

### Some Quasi-Newton Methods and its Practices in Root Findings

Hongchul Kim\*

*Dept. of Mathematics, Gangneung-Wonju National University, Gangneung, 25457, Korea*

**Abstract:** Root finding problems are regarded as one of prominent research subjects in the optimization problems. In this study, after brief review for the fixed point iteration method and Newton method as a systematic process to find roots for nonlinear equations, we investigate and examine efficiency for some quasi-Newton methods linked with damped Newton method and line search method to recover the rapid convergency which can be attained through Newton iteration method. Moreover, we design the detailed algorithms and verify the efficacy of the presented quasi-Newton methods by numerical experiments using Matlab programming.

**요약:** 근을 구하는 문제는 최적화문제의 주요한 탐구주제이다. 본 연구에서는 비선형방정식의 근을 구하기 위한 체계적인 과정으로서 고정점 반복법과 뉴턴 방법을 살펴보고, 뉴턴 반복법의 빠른 수렴성을 담보하기 위해 초기점의 설정을 개정하는 방법으로서 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법을 접목하는 준 뉴턴 방법의 실효성을 조사한다. 아울러 준 뉴턴 방법의 세부 알고리즘을 고안하고 MATLAB의 프로그래밍을 이용하여 실험한 결과를 바탕으로 준 뉴턴 방법의 유효성을 검증한다.

**Keywords:** Root findings, fixed point iteration method, Newton method, quasi-Newton method, damped Newton method, line search method

---

\* Corresponding Author. E-mail: hongchul@gwnu.ac.kr, Tel: +82-33-640-2273

## 1. 서론

자연과학의 가장 기본적인 문제들 중의 하나가 함수의 근이나 방정식의 해를 구하는 것이다. 해를 구하는 수학적 방법은 항등식과 인수분해를 이용해서 해를 구하거나 도함수와 그래프 등 함수적인 성질을 이용하여 해를 추정하는 등 매우 제한적인 방법에 의존한다. 이의 대안으로서는 고정점 반복법과 뉴턴 반복법 등 수치해석적인 알고리즘에 의해 근사 해를 구하는 방법을 생각할 수 있다. 특히 뉴턴 반복법은 아이디어가 단순할 뿐만 아니라 수렴성에 대한 좋은 특성 때문에 최적화 기법의 개발에 폭넓게 활용되고 있다. 실제 근  $\alpha$ 에서  $f'(\alpha)$ 가 0이 아니고 시작점  $x_0$ 가  $\alpha$ 에 충분히 가까우면 뉴턴 방법은  $\alpha$ 로 2차 수렴하는 빠른 수렴성을 낳는다([4], [6]). 즉, 적절한 함수의 조건이 보장될 때 현재의 해의 근사가 충분히 좋으면 뉴턴 방법은 해로 빠르게 수렴한다. 뉴턴 방법의 주된 어려움은 빠른 수렴성이 오직 국소적이라는 데 있다. 초기점  $x_0$ 가  $\alpha$ 에 충분히 가깝지 않으면 뉴턴 반복 계산은 희망이 없이 발산할 수 있다. 그러나 불행하게도 실제 근  $\alpha$ 에 “충분히 가까움”을 얻기 위해서 계산적인 노력을 확장하는 것은 그리 간단한 일이 아니다. 더욱이 가까움을 얻는 전략은 프로그래밍의 노력과 프로그램의 주요한 부분을 구성하며 실제 이행에 있어 작은 차이에 민감할 수 있다. 뉴턴 방법은 함수가 연속이고 유계인 1, 2계 도함수를 갖지 않거나 시작점이 실제 근에 충분히 가깝게 선정되지 않으면 수렴성에 대한 국소적 이론이 적용되지 않고 느리게 수렴하거나 아니면 전혀 수렴성을 보장하지 않는 결과를 낳을 수 있다. 이러한 어려움을 타개하기 위해서 고안된 방법이 준 뉴턴 방법이다(Gill et al. [3], Schoenberg [7]). 준 뉴턴 방법은 초기 추정치를 개선하여 정확한 해에 가까운 값으로 개선하고 이를 바탕으로 뉴턴 방법의 특장을 활용해서 빠르게 수렴하는 해를 구하는 방안을 제공한다.

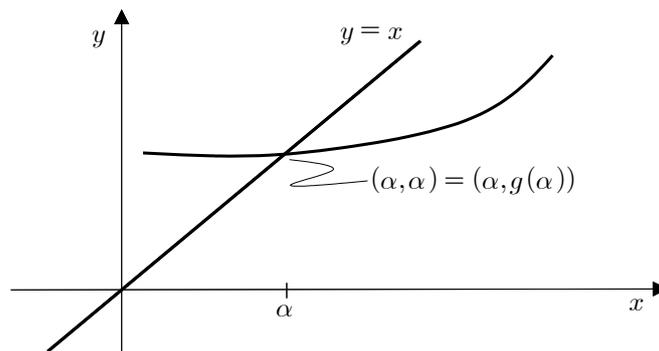
본 연구에서는 근찾기 문제에 있어서 수학적 해법의 한계성을 인식하고, 고정점 반복법과 뉴턴 방법에 의해 해를 구하는 방법과 한계를 조사함을 물론, 초기치의 추정을 개선해서 뉴턴 방법을 접목하는 준 뉴턴 방법으로서 감쇠 뉴턴 방법(Damped Newton Method)과 선 탐색 방법(Line Search Method)의 알고리즘과 실효성을 검증하는데 그 목적이 있다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. 제2절에서는 고정점 반복법과 뉴턴 방법의 원리를 소개하고 그 수렴성과 한계에 대해 알아본다. 제3절에서는 뉴턴 방법의 제한점을 우회하기 위한 준 뉴턴 방법의 필요성을 제기하고, 준 뉴턴 방법의 원리

와 이에 기반한 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법을 제시한다. 제4절에서는 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법에 대한 알고리즘을 설계하고 뉴턴 방법이 명백한 한계를 가지는 실험함수들에 대해서 실험한 결과를 제시함으로써 그 실효성을 검증한다.

## 2. 고정점 반복법과 뉴턴 방법

근찾기 문제를 해결하거나 분석하기 위해서 주어진 함수  $f(x)=0$ 의 해가  $g(x)=x$ 의 해가 될 수 있는 적당한 함수  $g(x)$ 를 택하여  $f(x)=0$ 의 해 대신에  $g(x)=x$ 의 해를 구하는 문제를 고정점 문제라고 하고  $g$ 를 고정점 함수라고 한다. 여기서  $f(x)=0$ 의 해  $x=\alpha$ 는  $g(\alpha)=\alpha$ 인  $g$ 의 고정점에 대응하는 점이다. 기하학적으로  $g$ 의 고정점은 [그림 1]에서와 같이 곡선  $y=g(x)$ 가 직선  $y=x$ 와 만날 때 주어진다.



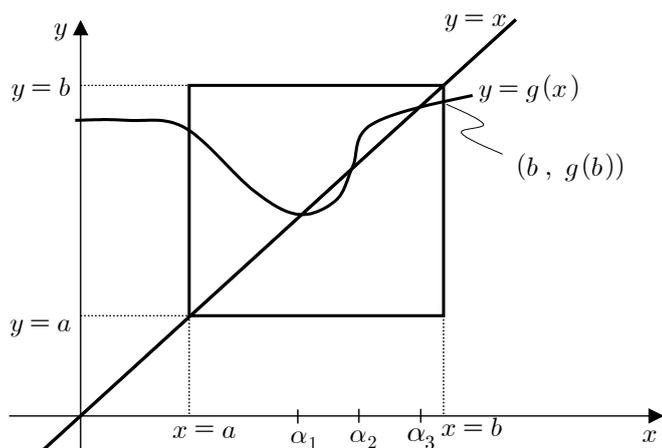
[그림 1] 고정점 문제

그렇다면  $g$ 를 어떻게 설정하면 좋을까?  $f(x)=0$ 으로부터  $g(x)=x$ 를 만족하는 함수  $g$ 를 설정하는 방법은 무한히 많다. 간단하게는  $g(x)=x+f(x)$ 를 들 수 있고, 조금 복잡한 형태로는  $g(x)=x+h(x)f(x)$ , ( $h(\alpha) \neq 0$ ) 이나

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (f'(\alpha) \neq 0)$$

등을 들 수 있다.

고정점 함수  $g$ 는 고정점이 존재하도록 설정되어야 한다. 이러한 조건 중 가장 간단한 경우는  $g$ 가 구간  $I=[a, b]$ 에서 정의된 연속함수일 때 [그림 2]와 같이 모든  $a \leq x \leq b$ 에 대해  $a \leq g(x) \leq b$ 일 때, 즉  $g(I) \subset I$ 일 때이다. 이 때  $g$ 를 수축사상이라고 한다.

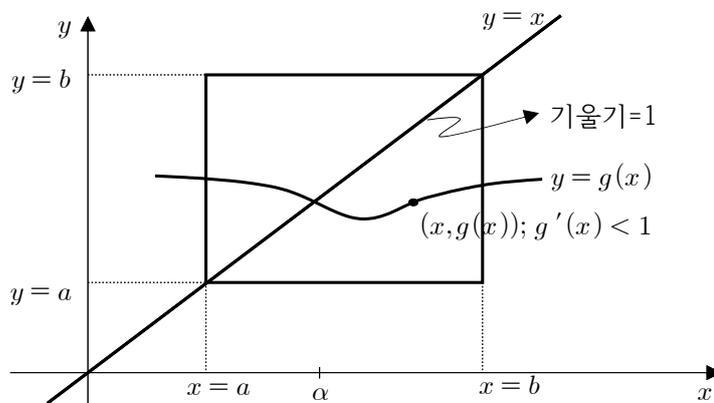


[그림 2] 수축사상

**정리 2.1**  $g$ 가 구간  $I=[a,b]$ 에서 정의된 수축사상이면  $g$ 는 적어도 하나의 고정점  $\alpha$ 를 갖는다.

**증명.**  $F(x) = g(x) - x$ 라 하자.  $g(a) \geq a$ 이고  $g(b) \leq b$ 이므로  $F(a) \geq 0$ 이고  $F(b) \leq 0$ 이다.  $F$ 는 구간  $I$ 에서 연속이고  $F(a)F(b) \leq 0$ 이므로 중간값 정리에 의해서  $F(\alpha) = 0$ 을 만족시키는  $\alpha$ 가 적어도 하나 존재한다. 따라서  $g(\alpha) = \alpha$ 인  $g$ 의 고정점이 존재한다. ■

그러면  $g(I) \subset I$  일 때 과연  $g$ 는 언제 구간  $I$ 에서 유일한 고정점을 가질까?  
 [그림 3]에서와 같이  $\alpha$ 를  $g$ 의 곡선과  $y=x$ 의 곡선이 만나는 첫 번째 지점이라고 하자. 이 때  $|g'(\alpha)| < 1$ 이면 그래프는 다시 솟아 올라갈 수 없다. 따라서 위 조건이 만족되면  $g$ 는 유일한 고정점을 갖는다. [그림 3]과 같이 그래프를 통해서 교차점의 기울기가 1보다 작을 경우 교차점은 단 하나만 존재하는 모습을 확인할 수 있다.



[그림 3]  $|g'(x)| < 1$ 인 경우

**정리 2.2** 구간  $I=[a, b]$ 에서 정의된 함수  $g$ 가 수축사상이고,  $|g'(x)| \leq L$ 인 상수  $L < 1$ 이 존재하면  $g$ 는  $I$ 에서 단 하나의 고정점을 갖는다.

**증명.**  $g$ 는 수축사상이므로  $g$ 의 고정점이 존재한다.

만약  $g$ 가 서로 다른 두 개의 고정점  $\alpha_1$ 과  $\alpha_2$ 를 갖는다면 평균값 정리에 의해

$$g(\alpha_1) - g(\alpha_2) = g'(\xi)(\alpha_1 - \alpha_2)$$

인  $\xi$ 가  $\alpha_1$ 과  $\alpha_2$ 사이에 존재한다. 이때  $|g'(\xi)| \leq L < 1$ 이므로

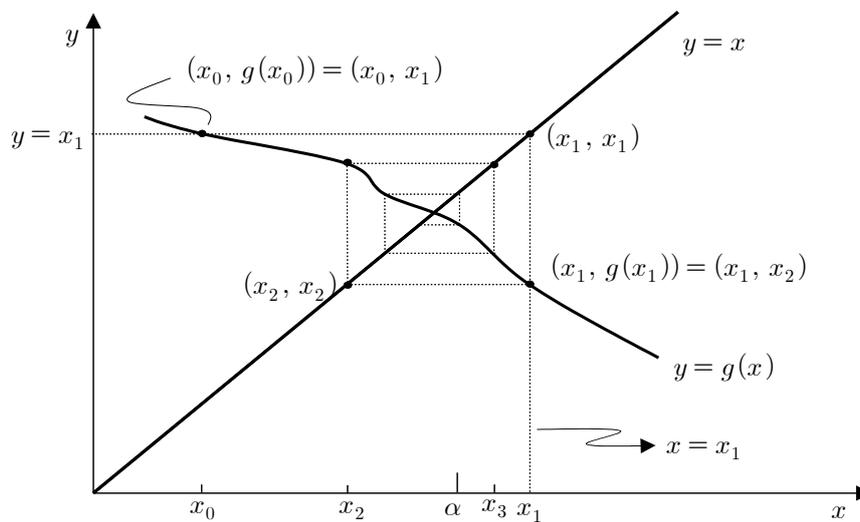
$$\begin{aligned} 0 < |\alpha_1 - \alpha_2| &= |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| = |g'(\xi)| |\alpha_1 - \alpha_2| \\ &\leq L |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2| \end{aligned}$$

가 되어 모순에 이른다. ■

함수  $f(x) = 0$ 를  $g(x) = x$ 로 전환하여  $g$ 의 고정점을 구하는 문제로 전환하면  $g$ 의 고정점은 어떻게 구할 수 있을까? 간단하게는 주어진 초기점  $x_0$ 에 대해서 다음과 같이 반복법을 시행하는 것이다. 이를 고정점 반복법이라고 한다.

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = \text{초기점}$$

우리는 이 반복법에 의해 생성된 수열  $\{x_n\}$ 이  $f(x) = 0$ 의 근이 되는  $g$ 의 고정점  $\alpha$ 로 수렴하기를 기대한다. 고정점 반복법에 의해 생성된 수열이 고정점  $\alpha$ 로 수렴하는 과정을 그래프로 표현하면 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 고정점 반복법

고정점 반복법이 유일한 고정점으로 수렴하는 수렴조건은 다음과 같다.

- ①  $g(I) \subset I$  이며  $|g'(x)| < 1$ 이다.

② 구간  $I$ 는 초기점  $x_0$ 와 고정점  $\alpha$ 를 포함해야 한다.

수열  $\{x_n\}$ 이  $\alpha$ 로 수렴할 때,  $x_n$ 이  $\alpha$ 로 수렴하는 빠르기의 정도를 측정하는 방법을 생각해 보자.  $e_n$ 을  $x_n$ 과 측정값  $\alpha$ 와의 절대오차, 즉  $e_n := |x_n - \alpha|$ 이라고 하자.  $e_n$ 이 다음을 만족하면 수열  $\{x_n\}$ 의 수렴율이  $p$ , 또는  $p$ 차 수렴이라고 한다:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = C.$$

여기서 상수  $C$ 를 점근 오차 상수라고 한다. 특히 수렴율이  $p=1$ 일 때를 1차 수렴이라 하고  $p=2$ 일 때를 2차 수렴이라고 한다. 그렇다면 1차 수렴과 2차 수렴은 어떤 점에서 차이점을 보일까? 이를 단순 비교하기 위해  $\alpha$ 로 1차 수렴하는 수열  $\{u_n\}$ 과  $\alpha$ 로 2차 수렴하는 수열  $\{v_n\}$ 을 생각하자. 그러면  $n$ 이 충분히 클 때, 각각 다음이 성립한다.

$$|u_{n+1} - \alpha| \approx C_1 |u_n - \alpha|; |v_{n+1} - \alpha| \approx C_2 |v_n - \alpha|^2$$

이제  $C_1 = C_2 = 0.9$ 이고  $|u_0 - \alpha| = 1 = |v_0 - \alpha|$ 이라고 할 때, 각각

$$|u_j - \alpha| \leq 10^{-6}; |v_k - \alpha| \leq 10^{-6}$$

를 만족하는  $j$ 와  $k$ 를 구하여 보자. 먼저  $C_1 = 0.9$ 이므로

$$|u_j - \alpha| \approx (0.9)|u_{j-1} - \alpha| \approx (0.9)^2 |u_{j-2} - \alpha| \approx \dots \approx (0.9)^j |u_0 - \alpha| = (0.9)^j$$

이고, 이것이  $10^{-6}$  이하일 때  $(0.9)^j \leq 10^{-6}$  으로부터

$$j \geq \frac{-6 \log(10)}{\log(0.9)} \approx 131.126\dots$$

이 되어 적어도 132번의 반복 계산을 수행해야 6자리의 정확도를 확보할 수 있다.

마찬가지로  $C_2 = 0.9$ 일 때

$$|v_k - \alpha| \approx (0.9)|v_{k-1} - \alpha|^2 \approx (0.9)^3 |v_{k-2} - \alpha|^2 \approx \dots \approx (0.9)^{2^k - 1} |v_0 - \alpha| = (0.9)^{2^k - 1}$$

이고 이것이  $10^{-6}$  이하 일 때  $(0.9)^{2^k - 1} \leq 10^{-6}$  으로부터

$$2^k - 1 \geq \frac{-6 \log(10)}{\log(0.9)} \approx 131.126\dots$$

이 되어  $k \geq 7.045\dots$  이므로 8번의 반복 계산을 수행하면 6자리의 정확도를 확보할 수 있다. 이와 같이 2차 수렴성은 1차 수렴성에 비해 매우 빠른 수렴성을 보장함을 알 수 있다. 일반적으로 이차 수렴성은 일차 수렴성에 비해 반복 횟수가 진행될 때 마다 정확도가 2배로 증대한다.

그러면 2차 수렴성을 보장하는 고정점 함수의 조건은 무엇일까?

**정리 2.3**  $g$ 가 고정점  $\alpha$ 의 근방에서 2계 연속미분가능하고  $g'(\alpha) = 0, g''(\alpha) \neq 0$ 이면 고정점 반복법은 2차 수렴한다.

**증명.**  $g$ 를  $x = \alpha$ 에 대해 전개하면 일반화된 평균값 정리에 의해

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2 \\ &= g(\alpha) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2 \end{aligned}$$

를 만족하는  $\xi$ 가 존재한다. 여기에  $x = x_n$ 을 대입하면  $x_{n+1} = g(x_n)$ 이므로

$$|x_{n+1} - \alpha| = \frac{|g''(\xi)|}{2}|x_n - \alpha|^2$$

가 성립한다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g''(\xi)|}{2} = \frac{|g''(\alpha)|}{2}. \quad \blacksquare$$

2차 수렴하는  $g(x) = x + h(x)f(x)$  형태의 고정점 함수를 생각하자.  $\alpha$ 를 고정점이라 할 때 정리 2.3으로부터 2차 수렴성을 보장하기 위한 조건으로  $g'(\alpha) = 0$ 를 만족하도록 함수  $h(x)$ 를 설정한다. 이때  $f(\alpha) = 0$ 임을 이용하면

$$\begin{aligned} 0 = g'(\alpha) &= 1 + h'(\alpha)f(\alpha) + h(\alpha)f'(\alpha) \\ &= 1 + h(\alpha)f'(\alpha) \end{aligned}$$

으로부터  $h(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ 가 얻어진다.

따라서 목표하는 고정점 함수로

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

를 생각할 수 있다. 이 고정점 함수를 토대로 한 반복법

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 = \text{초기점}$$

에 의해 근을 구하는 방법을 뉴턴 방법, 또는 뉴턴 반복법이라고 한다.

뉴턴 반복법은 곡선  $y = f(x)$ 상의 점  $(x_n, f(x_n))$ 에서의 접선의 방정식

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

이  $x$ 축을 끊는 점  $x_{n+1}$ 에 의해 주어진다([1], [4], [6]). 따라서 뉴턴 방법은 개념적으로 이해하기 쉽고 기본적으로 2차 수렴성을 전제로 설계된 방법이라고 할 수 있다.

**정리 2.4**  $f$ 가  $\alpha$ 에서 2계 연속미분가능하고  $f(\alpha)=0$ ,  $f'(\alpha) \neq 0$ 이면 뉴턴 반복법이 적어도 2차 수렴하는  $x_0$ 를 포함하는  $\alpha$ 의 근방  $I_\alpha$ 가 존재한다.

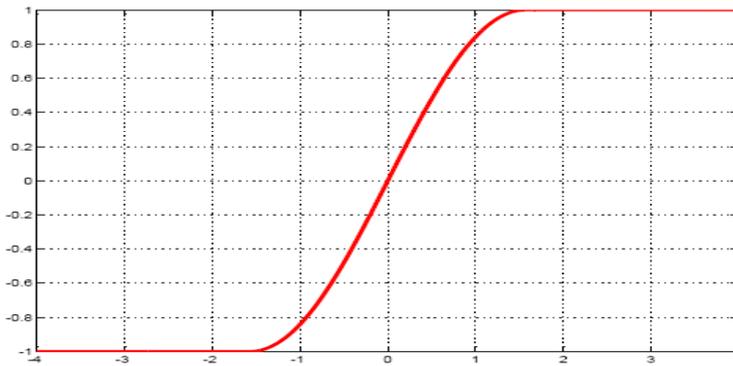
**증명.** 뉴턴 방법에 대한 고정점 함수는  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 이고,

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)^2 - f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$$

이므로 적어도 2차 수렴성이 보장된다. ■

뉴턴 반복법의 2차 수렴성을 보장하기 위해서는 초기점을 실제 근  $\alpha$  근방에서 설정하는 것이 필요하다. 뉴턴 반복법에서 초기점의 설정에 따른 수렴성의 민감성과 복잡성에 대해서는 다음과 같은 함수의 예를 통해서 살펴볼 수 있다.

(예시 1)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \pi/2 \\ \sin x, & |x| \leq \pi/2 \\ -1, & x \leq -\pi/2 \end{cases}$

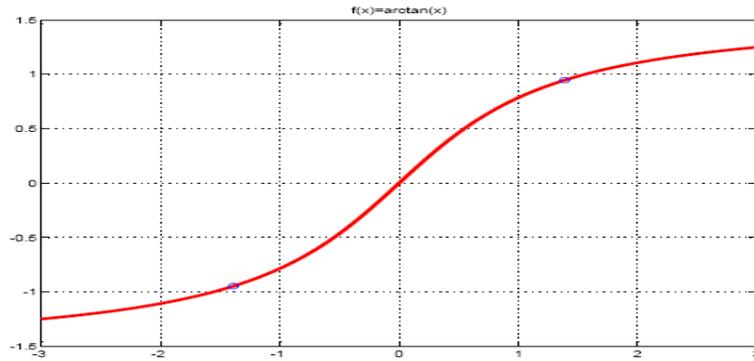


[그림 5]  $y = f(x)$ 의 그래프

$x_0 = 1.3$ 이면  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx -2.302102449$  이고, 이때  $f'(x_1) = 0$ 이므로

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 은 계산이 불가능하다. 따라서 뉴턴 반복법을 수행할 수 없다.

(예시 2)  $f(x) = \arctan x$ ,  $(-3 \leq x \leq 3)$

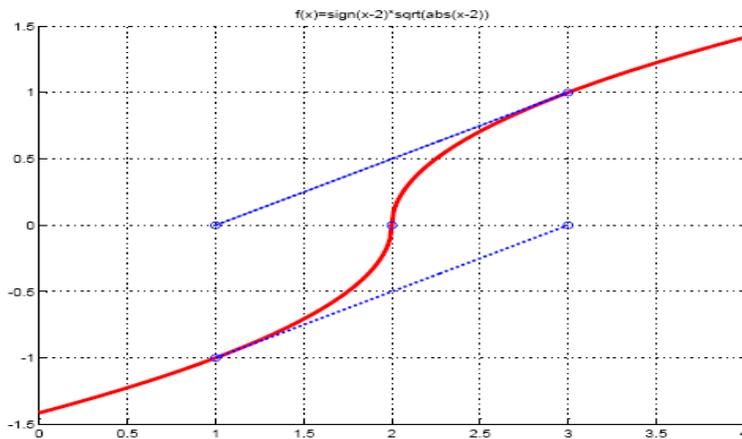


$0 : x_c \approx 1.3917452002707$

[그림 6]  $f(x) = \arctan x$ 의 그래프

$x_0 \in (-x_c, x_c)$ 이면 뉴턴 반복법은 2차 수렴하고,  $x_0 = x_c$ 이면 뉴턴 반복법은  $-x_c$ 와  $x_c$ 사이를 무한 반복 순환하며,  $x_0 \notin [-x_c, x_c]$ 이면 뉴턴 반복법은 발산한다.

(예시 3)  $f(x) = \text{sgn}(x-2)\sqrt{|x-2|}$  (Moler [5])



[그림 7]  $f(x) = \text{sgn}(x-2)\sqrt{|x-2|}$ 의 그래프

모든  $x_0 \neq 2$ 에 대해 뉴턴 반복  $x_n$ 은  $-x_0$ 와  $x_0$ 사이를 무한 반복 순환한다.

### 3. 준 뉴턴 방법

앞에서 살펴본 바와 같이 함수  $f$ 에 대한 적절한 조건하에 초기점을 실제 근  $\alpha$ 에 충분히 가까운 곳에서 선택하면 뉴턴 반복법은 실제 근  $\alpha$ 로 2차 수렴하는 근사

계산을 제공한다. 이와 같은 전제하에서 반복에 의한 빠른 수렴성을 회복하기 위해서 초기점을 실제 근의 근방에서 택하는 전략이 필요하다. 이러한 대표적인 전략으로 이분법을 생각할 수 있으나 이분법은 수렴성이 느리고 다변수 함수의 근을 탐색하는 목적에는 이용될 수 없으므로 수렴성을 보장하고 다변수 함수의 근의 탐색에도 적합한 방법으로 준 뉴턴 방법을 적용하는 방안을 모색한다.

$\alpha$ 에 대한 추정  $u$ 에 대해 다음과 같은 형태의 새로운 추정을 생성하는 방법을 생각한다.

$$u + \lambda p, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

이때  $p$ 는 함수의 감소를 결정하는 탐색방향으로서  $p > 0$ 이면 우측,  $p < 0$ 이면 좌측을 나타낸다. 또한  $\lambda$ 는 단계크기로서 주어진 탐색방향으로의 진행크기를 결정하는 요소이다. 먼저 탐색방향을 결정하기 위해서 주어진 함수  $f$ 에 대해 다음과 같이 정의된 양의 함수를 생각하자.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x)^2$$

그러면  $f$ 의 근  $\alpha$ 는  $\phi$ 를 최소화하는 점으로 귀결된다.

따라서  $\alpha$ 에 대한 초기 추정치로서  $u$ 를 개선하기 위해

$$\phi(u + \lambda p) < \phi(u), \quad (0 < \lambda < r)$$

인 감소 방향  $p$ 와 단계크기  $\lambda$ 를 결정하는 문제를 생각할 수 있다.

**정리 3.1**  $\phi$ 가  $u$ 의 근방에서 2계 연속미분가능하면,

$$\phi'(u)p < 0$$

일 때  $p$ 는  $u$ 에서  $\phi$ 에 대한 감소 방향이다.

**증명.** 일반화된 평균값 정리에 의해

$$\begin{aligned} \phi(u + \lambda p) &= \phi(u) + \phi'(u)(\lambda p) + \phi''(\xi)(\lambda p)^2/2 \\ &= \phi(u) + \lambda[\phi'(u)p + \lambda\phi''(\xi)p^2/2] \end{aligned}$$

를 만족하는  $\xi$ 가  $u$ 와  $u + \lambda p$  사이에 존재한다.

여기서  $\phi''$ 이 연속이므로 위 식의 [...] 안은  $\lambda \rightarrow 0$ 일 때  $\phi'(u)p$ 로 수렴한다. 따라서  $\lambda$ 가 충분히 작으면

$$\text{sgn}[\phi'(u)p + \lambda\phi''(u)p^2/2] = \text{sgn}[\phi'(u)p], \quad (0 < \lambda \leq r)$$

이고  $\phi'(u)p < 0$ 이므로  $\phi(u + \lambda p) < \phi(u)$ 가 되어  $p$ 는 감소방향이다. ■

**보조정리 3.2**  $f(u) \neq 0$ 이고  $f'(u) \neq 0$ 이면  $p = -\frac{f(u)}{f'(u)}$ 는 감소 방향이다.

**증명.**  $\phi'(u) = f(u)f'(u)$ 이므로

$$\text{sgn}(\phi'(u)p) = \text{sgn}\left(f(u)f'(u)\left(-\frac{f(u)}{f'(u)}\right)\right) = \text{sgn}(-f(u)^2) < 0$$

이므로  $\phi'(u)p < 0$ 이 성립한다. ■

감소 방향  $p = -\frac{f(u)}{f'(u)}$ 를 뉴턴 방향이라고 한다.

이제 감소방향이 결정되면 초기점의 추정을 개선하기 위해 단계크기를 결정하는 문제를 생각한다. 컴퓨터의 연산에 따른 실효적인 감소 기준으로 1983년 Dennis와 Schnabel([2])은 다음을 제안하였다. 이 감소 기준은 최적화의 검증기준으로 널리 활용되고 있다.

$$\phi(u + \lambda p) < \phi(u) + 10^{-4}\lambda\phi'(u)p$$

이때 기울기  $\phi'(u)p$ 가 상대적으로 크면 단계크기는 상대적으로 크게 설정하고,  $\phi'(u)p$ 가 작으면  $\lambda$ 의 크기도 상대적으로 작게 설정한다.

$\lambda$ 를 탐색하는 가장 간단한 전략으로  $p = -\frac{f(u)}{f'(u)}$ 가 감소 방향이므로 처음에  $\lambda = 1$ 을 시작점으로 한 완전 뉴턴 방법을 적용해서 검증기준을 만족하는지 확인한 후 아래와 같이 절반씩 단계크기를 줄여나가면서 검증기준을 만족하도록 초기점을 개선해나가는 방법을 생각할 수 있다.

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

이와 같은 단계크기의 선출과정에 대응하는 방법을 감쇠 뉴턴 방법(Damped Newton Method)이라고 한다.

한편, 주어진  $u$ 와 감소 방향  $p$ 에 대해  $q(\lambda) = \phi(u + \lambda p)$ 를 최소화하도록 단계크기  $\lambda$ 를 설정하기 위해서  $q(\lambda)$ 를 2차식  $\Pi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ 로 근사시켜 [그림 8]에서와 같이  $\Pi(\lambda)$ 의 대칭축  $\lambda^*$ 를 다음 단계의 단계크기로 설정하는 방법을 생각할 수 있다. 이와 같은 방법을 선 탐색 방법(Line Search Method)이라고 한다.  $q(\lambda)$ 를  $\Pi(\lambda)$ 로 근사시키기 위해 다음과 같이 탐색구간  $[0, r]$ 의 양쪽 끝점을 지나고 0에서의 접

선이 일치하도록 근사조건을 설정한다.

$$\Pi(0) = q(0), \quad \Pi(r) = q(r), \quad \Pi'(0) = q'(0)$$

이와 같은 조건하에서  $q(\lambda) = \phi(u + \lambda p)$ 에 대한 2차 근사식은 다음과 같이 주어진다.

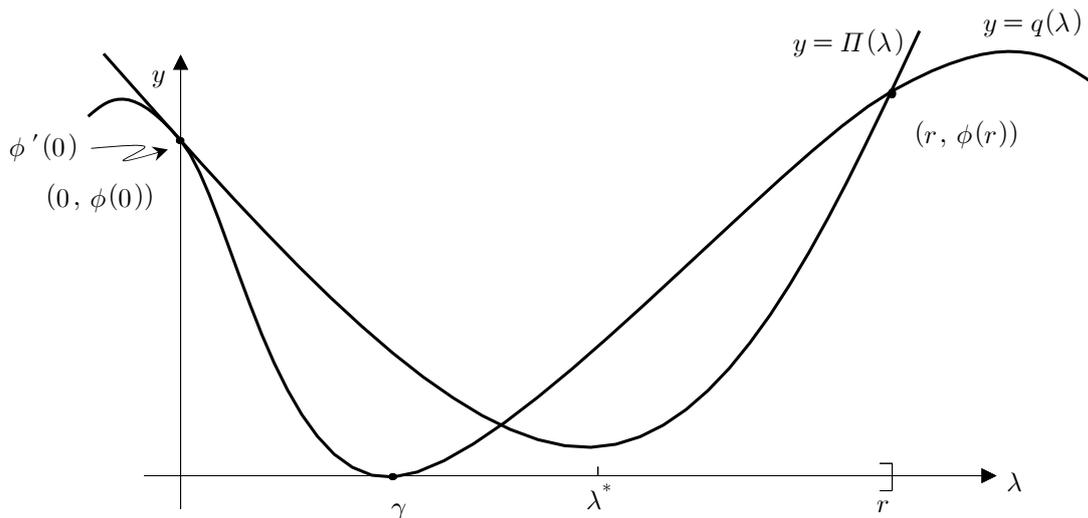
$$q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$\begin{cases} a = \frac{\phi(u + rp) - \phi(u) - r\phi'(u)p}{r^2} \\ b = \phi'(u)p \\ c = \phi(u) \end{cases}$$

따라서 2차식  $\Pi(\lambda)$ 는 대칭축  $\lambda = \lambda^*$ 에서 최소를 이루므로 최적근사 단계크기로

$$\lambda^* = -\frac{b}{2a}$$

를 설정한다.



[그림 8] 선 탐색 방법

#### 4. 결과 및 분석

함수의 근 탐색을 위한 뉴턴 방법은 함수에 대한 조건이 맞으면 초기점을 정확한 해 근방에서 택할 때 2차 수렴하는 빠른 수렴성을 가지고 있다. 이론적으로 초기점의 추정은 뉴턴 방법의 수렴성에 중요한 연결고리로 작용한다. 초기점을 개선해서 뉴턴 방법의 수렴성을 회복하기 위한 방안으로 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방

법을 모색하였다.

탐구과정을 통해 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법에 대한 세부 방법론을 모색하고 알고리즘을 작성하여 MATLAB 프로그래밍으로 이를 실험하는 과정을 체계적으로 거쳐 방법의 유효성을 검증하였다. 실험함수로는 초기점의 설정에 따라 통상적인 뉴턴 방법의 수렴성이 담보되지 않는 다음과 같은 2종의 특수한 함수를 실험함수로 채택하여 실험을 진행하였다.

$$[\text{실험함수1}] \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \pi/2 \\ \sin x, & |x| \leq \pi/2 \\ -1, & x \leq -\pi/2 \end{cases} \quad ([\text{그림 5}])$$

[실험함수1]의 경우 초기점을  $u = 1.3$ 으로 설정하면 뉴턴 감소 방향은

$$p = -\frac{f(u)}{f'(u)} \approx -3.602102449$$

이고 이에 따라 1회의 뉴턴 반복이  $u+p \approx -2.302102449 < -\frac{\pi}{2}$  이므로 다음 반복 과정에서  $f'(u+p) = 0$ 이 되어 뉴턴 반복법은 수렴하지 않는다. 수치실험을 위한 함수프로그램으로는 함수  $f(x)$ 와 대응하는 양함수  $\phi(x) = \frac{1}{2}f(x)^2$ 을 위해 다음과 같이 설정하였다.

```
function [y,dy]=sample(x)
if x>pi/2
    y=1;dy=0;
elseif x>=-pi/2 & x<=pi/2
    y=sin(x);dy=cos(x);
else
    y=-1;dy=0;
end
```

```
function [y,dy]=phi_sample(x)
if x>=-pi/2 & x<=pi/2
    y=0.5*(sin(x))^2;
    dy=0.5*sin(2*x);
else
    y=0.5;
    dy=0;
end
```

$$[\text{실험함수2}] \quad f(x) = \arctan x, \quad (-3 \leq x \leq 3) \quad ([\text{그림 6}])$$

[실험함수2]의 주요 특성은 초기치를  $x_c \approx 1.3917452002707$ 로 설정하면 뉴턴 반복법은  $-x_c$ 와  $x_c$ 를 무한 반복 순환하며, 초기점이  $|u| < x_c$ 일 때 수렴하고  $|u| > x_c$ 일 때 발산하는 특성을 가지고 있다. 수치실험을 위한 함수프로그램으로는 함수  $f(x)$ 와 대응하는 양함수  $\phi(x) = \frac{1}{2}f(x)^2$ 을 위해 다음과 같이 설정하였다.

```
function [y,dy]=sample1(x)
y=atan(x);
dy=1./(1+x.^2);
```

```
function [y,dy]=phi_sample1(x)
y=0.5*(atan(x)).^2;
dy=atan(x)./(1+x.^2);
```

#### 4.1 감쇠 뉴턴 방법의 알고리즘과 수치실험

##### (1) 알고리즘

주어진 함수  $f(x)=0$ 의 근을 구하기 위해 양함수  $\phi(x)=\frac{1}{2}f(x)^2$ 에 대해

$\min_{\lambda} \phi(u+\lambda p)$ 를 구하는 과정( $\lambda=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$  을 단계적으로 시행)

(1단계) 초기치  $u$ 에 대해 뉴턴 방향  $p = -\frac{f(u)}{f'(u)}$  를 계산한다.

(2단계)  $\phi(u)$ 와 기울기  $\phi'(u)p$ 를 계산하고  
 $\lambda=1$  과 stage=1을 설정한다.

(3단계) (감쇠과정)

while  $\lambda > \text{eps}$

$\phi(u+\lambda p)$ 와 검증기준= $\phi(u)+10^{-4}\lambda\phi'(u)p$  계산

(검증기준) if  $\phi(u+\lambda p) < \text{검증기준}$

결과 =[stage,  $\lambda$ ,  $u+\lambda p$ , 검증기준] 출력

break;

else

(감쇠) stage+1 ;  $\lambda = \frac{1}{2} \lambda$

end

end

##### (2) 프로그램

xold=1.3; % 초기 추정치

rho=1/2; % 감쇠 단계크기

[f,fp]=sample(xold);

p=-f/fp; % 뉴턴 감소 방향 계산

lambda=1; %  $\lambda$ 의 초기화

[phi\_old,phi\_oldprime]=phi\_sample(xold);

```
xnew=xold+lambda*p; % 초기점 개정
stage=1;
while lambda>eps
    xnew=xold+lambda*p;
    [phi_new,phi_newprime]=phi_sample(xnew);
    standard=phi_old+10^-4*phi_oldprime*p*lambda; % 검증기준
    result=[stage,lambda,xnew,phi_new,standard];
    fprintf('%3g %18.14f %18.14f %18.14f %18.14f \n',result);
    if phi_new<standard
        break;
    else
        lambda=rho*lambda;
        stage=stage+1;
    end
end
```

(3) 감쇠 뉴턴 방법 적용 후 뉴턴 프로그램 시행

```
tol=10^(-8);
xold=-0.50105122398399; % 개정 초기점
n=0; diff=10; nmax=50; % 초기 데이터
while diff>=tol & n<nmax
    n=n+1;
    [y,dy]=sample(xold);
    xnew=xold-y/dy; % 뉴턴 방법
    [fx,dfx]=sample(xnew);
    fx=abs(fx);
    diff=abs(xnew-xold);
    result=[n,xold,xnew,fx];
    fprintf('%3g %20.14f %20.14f %20.14f \n',result);
    xold=xnew; % 업데이트
end
```

(4) 실험 자료

[실험함수1]

◦ 초기추정  $u = 1.3$ 의 경우 감쇠 뉴턴 알고리즘 적용해서 초기점 개선

단계	$\lambda$	$u + \lambda p$	$\phi(u + \lambda p)$	검증기준
1	1	-2.30210244796798	0.500000000000000	0.46412934390457
2	0.5	-0.50105122398399	0.11536700898398	0.46417576612340

◦ 초기점 개정 후 뉴턴 반복법 적용

반복횟수	xold	xnew	f(xnew)
1	-0.50105122398399	0.04661700869880	0.04660012627619
2	0.04661700869880	-0.00003379789363	0.00003379789362
3	-0.00003379789363	0.00000000000001	0.00000000000001
4	0.00000000000001	0.00000000000000	0.00000000000000

[실험함수2]

◦ 초기추정  $u = 3$ 의 경우 감쇠 뉴턴 알고리즘 적용해서 초기점 개선

단계	$\lambda$	$u + \lambda p$	$\phi(u + \lambda p)$	검증기준
1	1	-9.49045772398254	1.07430638376572	0.77990165923882
2	0.5	-3.24522886199127	0.80884471183393	0.77997966500590
3	0.25	-0.12261443099564	0.00744266382624	0.78001866788944

◦ 초기점 수정 후 뉴턴 반복법 적용

반복횟수	xold	xnew	f(xnew)
1	-0.12261443099564	0.00122527632451	0.00122527571134
2	0.00122527632451	-0.00000000122634	0.00000000122634
3	-0.00000000122634	0.00000000000000	0.00000000000000

4.2 선 탐색 방법의 알고리즘과 수치실험

(1) 알고리즘

주어진 함수  $f(x) = 0$ 의 근을 구하기 위해 양함수  $\phi(x) = \frac{1}{2}f(x)^2$ 에 대해

$\min_{\lambda} \phi(u + \lambda p)$ 를 구하는 과정

(1단계) 초기치  $u$ 에 대해 뉴턴 방향  $p = -\frac{f(u)}{f'(u)}$ 를 계산한다.

(2단계)  $\phi(u)$ 와 기울기  $\phi'(u)p$ 를 계산하고  
 $\lambda = 1$  과 stage=1을 설정한다.

(3단계) while lambda>eps

```

    r = λ로 설정하고  $\phi(u + rp)$ 와 검증기준= $\phi(u) + 10^{-4}\lambda\phi'(u)p$  계산
(검증기준) if  $\phi(u + \lambda p) <$  검증기준
    결과 =[stage,  $\lambda$ ,  $u + \lambda p$ , 검증기준] 출력
    break;
else
(2차근사)  $a = \frac{\phi(u + rp) - \phi(u) - r\phi'(u)p}{r^2}$ 
     $b = \phi'(u)p$ 
     $c = \phi(u)$  계산
(추정 단계크기) stage = stage+1;  $\lambda = -\frac{b}{2a}$  설정;
end
end

```

(2) 프로그램

```

xold=1.3; % 초기 추정치
[f,fp]=sample1(xold);
p=-f/fp; % 뉴턴 감소 방향
lambda=1; % λ의 초기화
[phi_old,phi_oldprime]=phi_sample1(xold);
stage=1;
while lambda>eps
    r=lambda;
    xnew=xold+r*p; % 초기점 개정
    [phi_new,phi_newprime]=phi_sample1(xnew);
    standard=phi_old+10^-4*phi_oldprime*p*r;
    result=[stage,lambda,xnew,phi_new,standard]; % 검증기준
    fprintf('%3g %18.14f %18.14f %18.14f %18.14f \n',result);
    if phi_new<standard
        break;
    else
        a=(phi_new-phi_old-r*phi_oldprime*p)/r^2;
        b=phi_oldprime*p;
        c=phi_old;

```

```

lambda=-b/(2*a); % 최적 단계크기 근사 추정
stage=stage+1;
end
end

```

(3) 실험 자료

[실험함수1]

◦ 초기추정  $u = 1.3$ 의 경우 선 탐색 알고리즘 적용해서 초기점 개선

단계	$\lambda$	$u + \lambda p$	$\phi(u + \lambda p)$	검증기준
1	1	-2.30210244796798	0.500000000000000	0.46412934390457
2	0.48144731987589	-0.43422256949257	0.08849645185900	0.46417748863656

◦ 초기점 개정 후 뉴턴 반복

반복횟수	xold	xnew	f(xnew)
1	-0.43422256949257	0.02951911712249	0.02951483025638
2	0.02951911712249	-0.00000857709536	0.00000857709536
3	-0.00000857709536	0.000000000000000	0.000000000000000

[실험함수2]

◦ 초기추정  $u = 2$ 의 경우 선 탐색 알고리즘 적용해서 초기점 개선

단계	$\lambda$	$u + \lambda p$	$\phi(u + \lambda p)$	검증기준
1	1	-3.53574358897045	0.83873144543982	0.61276656382822
2	0.42221028490819	-0.33724787787788	0.05290012297816	0.61283738803673

◦ 초기점 개정 후 뉴턴 반복법 적용

반복횟수	xold	xnew	f(xnew)
1	-0.33724787787788	0.02501651376192	0.02501129705938
2	0.02501651376192	-0.00001043601647	0.00001043601647
3	-0.00001043601647	0.000000000000000	0.000000000000000

## 5. 결론

함수가 좋은 조건을 가지고 있으면 뉴턴 방법은 초기점을 정확한 해의 근방에서 택할 때 매우 빠르게 수렴하는 좋은 특성을 가지고 있다. 일반적으로 뉴턴 반복법

은 초기점의 설정에 민감하므로 정확한 해 근방에서 초기점을 추정하는 실효적인 방법을 도입하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 근찾기 문제의 체계적인 이해를 도모하고 고정점 반복법과 뉴턴 반복법을 사용하여 근사해를 구하는 과정과 수학적 원리를 체계적으로 조사하였다. 아울러 초기점을 개선해서 뉴턴 방법의 수렴성을 회복하기 위한 전략으로 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법을 모색하였다. 탐구과정에서는 각각의 방법에 대한 세부 아이디어와 수학적 원리를 조사하고, 이에 따라 알고리즘을 설계하고 MATLAB으로 프로그램을 작성하여 실험하는 과정을 거쳐 전략의 유효성을 검증하였다. 실험함수로는 초기점의 설정에 따라 통상적인 뉴턴 방법의 수렴성이 담보되지 않는 2종의 특수 함수를 실험함수로 채택하여 수치실험을 시행하였다.

탐구결과 주어진 초기점의 설정하에서는 뉴턴 반복법에 의한 수렴성을 보장할 수 없던 실험함수들이 준 뉴턴 방법을 적용한 초기점의 개정에 의해 빠르게 해로 수렴하는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 최적화의 특성에 맞추어 목표함수를 최소화하고자 하는 목적으로 고안한 감쇠 뉴턴 방법과 선 탐색 방법을 초기점의 개정에 접목함으로써 뉴턴 방법의 취약점을 보완하는 전략이 최적화나 근의 탐색에 반드시 필요한 과정임을 확인할 수 있다.

## 6. 참고문헌

- [1] 김홍철 · 손성익, 수치해석 -MATLAB 활용-, 경문사, 2011.
- [2] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, Prentice Hall, 1983.
- [3] Phillip E. Gill, Walter Murray and Margret H. Wright, Practical optimization, Academic Press, 1981.
- [4] Lee W. Johnson & R. Dean Riess, Numerical analysis, Addison Wesley, 1982.
- [5] Cleve B. Moler, Numerical computing with Matlab, Siam, 2004.

- [6] Endre Süli and David Mayers, An introduction to numerical analysis, Cambridge, 2003.
- [7] R. Schoenberg, Optimizaton with Quasi-Newton Method, Aptech Systems, 2001.

# Implications, Negations and Residuated Lattices

Gyung Rae Kim, Yong-Chan Kim\*

*Dept. of Mathematics, Gangneung-Wonju National University, Gangneung,  
210-702, Korea*

## 함의, 부정과 잔여 격자들

김경래, 김용찬\*

강릉원주대학교 자연과학대학 수학과

**요약:** 이 논문에서는 함의, 부정과 잔여 격자들의 성질들을 조사하고 그 예들을 주었다.

**Abstract:** In this paper, we investigate some properties of implications, negations and residuated lattices and give their examples.

**Keywords:** implications, negations, residuated lattices, complete lattices

## 1. Introduction

Hajek introduced a complete residuated lattice which is an algebraic structure for many valued logic. It is an important mathematical tool for algebraic structure of fuzzy contexts and the model of computing with words, pattern recognition and data base theory.

On the other hand, implication structures play an important role in metric spaces, algebraic structures.

In this paper, we introduce the notions of implication structures in complete lattices. We investigate the relationships among implications, negations and

---

\* Corresponding author. E-mail: yck@gwnu.ac.kr, Tel: +82-33-640-2270

이 논문은 강릉원주대 자연과학연구소 지원을 받아 작성되었습니다.

complete residuated lattices. Moreover, we study the properties of implications. We give their examples. We investigate the properties of implications and negations. We can obtain the residuated lattice from an implication with a negation.

## 2. Implications, negations and residuated lattices

**Definition 2.1.** Let  $L$  be bounded lattice with top element  $\top$  and bottom  $\perp$ . The structure  $(L, \rightarrow, \perp, \top)$  is called an *implication* if it satisfies the following conditions,  $x, y, z \in L$ ,

- (I1)  $\top \rightarrow x = x$ ,
- (I2)  $(x \rightarrow y) \rightarrow [(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)] = \top$ ,
- (I3)  $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$ .

**Example 2.2.** Let  $(L = \{0,1\}, \rightarrow, 0, 1)$  be given where  $0=F$  and  $1=T$ . Define  $1 \rightarrow 0 = 0, 1 \rightarrow 1 = 1, 0 \rightarrow 1 = 1, 0 \rightarrow 0 = 1$ . Then  $(L = \{0,1\}, \rightarrow, 0, 1)$  is an implication from the following statements:

- (I1)  $1 \rightarrow 0 = 0, 1 \rightarrow 1 = 1$
- (I2) Put  $S = (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ ,  $P = (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$

x	y	z	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow z$	$x \rightarrow z$	S	P
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

(I3)

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$(x \rightarrow y) \rightarrow y$	$(y \rightarrow x) \rightarrow x$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

**Example 2.3.** Let  $(L = P(X), \rightarrow, \emptyset, X)$  be given. Define

$$A \rightarrow B = A^c \cup B.$$

Then  $(L = P(X), \rightarrow, \emptyset, X)$  is an implication from the following statements:

(I1)  $X \rightarrow B = X^c \cup B = \emptyset \cup B = B.$

(I2)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)) = X$  from;

Since  $(B^c \cup D) \rightarrow (A^c \cup D) = (B^c \cup D)^c \cup (A^c \cup D) = (B \cap D^c) \cup (A^c \cup D),$

$$(A^c \cup B) \rightarrow ((B^c \cup D) \rightarrow (A^c \cup D)) = (A \cap B^c) \cup [(B \cap D^c) \cup (A^c \cup D)]$$

$$= (A \cap B^c) \cup [(B \cup (A^c \cup D))] = A \cup [(B \cup (A^c \cup D))] = X$$

(I3)  $(A \rightarrow B) \rightarrow B = (B \rightarrow A) \rightarrow A = A \cup B$  from:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow B = (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B^c) = A \cup B.$$

$$(B \rightarrow A) \rightarrow A = (B^c \cup A)^c \cup A = (B \cap A^c) \cup A = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup B.$$

**Example 2.4.** Let  $\rightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  be defined as

$$x \rightarrow y = (1 - x^p + y^p)^{1/p} \wedge 1 \quad (p > 0).$$

Then  $([0,1], \rightarrow, 0, 1)$  is an implication from the following statements:

(I1)  $1 \rightarrow x = x.$

(I2) If  $z \leq y \leq x$ , then

$$\begin{aligned} & (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \\ &= (1 - x^p + y^p)^{1/p} \rightarrow ((1 - y^p + z^p)^{1/p} \rightarrow (1 - x^p + z^p)^{1/p}) \\ &= (1 - x^p + y^p)^{1/p} \rightarrow (1 - x^p + y^p)^{1/p} = 1. \end{aligned}$$

If  $z \leq x \leq y$ , then

$$\begin{aligned} & (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \\ &= 1 \rightarrow ((1 - y^p + z^p)^{1/p} \rightarrow (1 - x^p + z^p)^{1/p}) \\ &= (1 - x^p + y^p)^{1/p} \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

If  $x \leq z \leq y$ , then

$$\begin{aligned} & (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \\ &= 1 \rightarrow ((1 - y^p + z^p)^{1/p} \rightarrow 1) = 1. \end{aligned}$$

If  $x \leq y \leq z$ , then

$$\begin{aligned} & (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \\ &= 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1. \end{aligned}$$

Other cases are similarly proved.

(I3) If  $x \leq y$ , then

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = 1 \rightarrow y = y$$

$$(y \rightarrow x) \rightarrow x = (1 - y^p + x^p)^{1/p} \rightarrow x = (1 - 1 + y^p - x^p + x^p)^{1/p} = y.$$

Other case is similarly proved.

**Example 2.5.** Let  $\rightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  be defined as

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y, \\ \frac{y}{x}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since  $(0.7 \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1$  and  $(0 \rightarrow 0.7) \rightarrow 0.7 = 0.7$ , it does not satisfy (I3).

Hence it is not an implication.

**Example 2.6.** Let  $\rightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  be defined as

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y, \\ y, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since  $(0.7 \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1$  and  $(0 \rightarrow 0.7) \rightarrow 0.7 = 0.7$ , it does not satisfy (I3).

Hence it is not an implication.

**Theorem 2.7.** Let  $(X, \rightarrow, 1, 0)$  be an implication operator. Define

$$a \leq b \quad \text{iff} \quad a \rightarrow b = 1.$$

Then  $(X, \leq)$  is a partially ordered set.

Proof. (1) ( reflexive ) Since  $(1 \rightarrow 1) \rightarrow [(1 \rightarrow x) \rightarrow (1 \rightarrow x)] = 1$ , then

$1 \rightarrow (x \rightarrow x) = 1$ . So,  $x \rightarrow x = 1$ .

(2) (transitive) If  $x \leq y, y \leq z$ , then  $x \rightarrow y = 1, y \rightarrow z = 1$ .

Since  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ , we have

$$1 \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1 \rightarrow (x \rightarrow z) = x \rightarrow z = 1.$$

(3) (antisymmetric) Let  $x \leq y, y \leq x$  be given. Since  $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$ , we have  $(x \rightarrow y) \rightarrow y = 1 \rightarrow y = y = (y \rightarrow x) \rightarrow x = 1 \rightarrow x = x$ .

**Example 2.8.** (1) Since  $(P(X), \rightarrow, X, \emptyset)$  be an implication defined as  $A \rightarrow B = A^c \cup B$ . Then  $A \subset B$  iff  $A \rightarrow B = A^c \cup B = X$ . Hence  $(P(X), \subset)$  a partially ordered set.

(2) Let  $\rightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  be an implication defined as

$$x \rightarrow y = (1 - x^p + y^p)^{1/p} \wedge 1.$$

Then  $x \rightarrow y = (1 - x^p + y^p)^{1/p} \wedge 1 = 1$  iff  $(1 - x^p + y^p)^{1/p} \geq 1$  iff  $x \leq y$ .

Hence  $([0,1], \leq)$  is a partially ordered set.

**Definition 2.9.** An operator  $N: L \rightarrow L$  is called a *negation* if it satisfies the following conditions. For all  $x, y \in L$ ,

(N1)  $N(0) = 1, N(1) = 0,$

(N2)  $N(x) \leq N(y)$  if  $x \geq y.$

(N3)  $N(N(x)) = x.$

**Example 2.10.** (1) If  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  with  $N(x) = 1 - x$ . Then  $N$  is a negation.

(2) If  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  with  $N(x) = 1 - x^2$ , then  $N$  is not negation from:

$$N(N(x)) = N(1 - x^2) \neq x.$$

(3) If  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  with  $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , then  $N$  is a negation from

$$N(N(x)) = N(\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{1 - 1 + x^2} = x.$$

(4) If  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  with  $N(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{p}}, (p > 1)$ , then  $N$  is a negation.

**Theorem 2.11.** Let  $(L, \rightarrow, \perp, \top)$  be an implication. Define  $N(a) = a \rightarrow 0$ . Then  $N$  is a negation with  $a \rightarrow b = N(b) \rightarrow N(a)$  for all  $a, b \in L$ .

**Proof.** (1) (N1)  $N(1) = 1 \rightarrow 0 = 0, N(0) = 0 \rightarrow 0 = 0.$

(N2) Let  $a \leq b$ . By (I2),  $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow 0) \rightarrow (a \rightarrow 0)) = 1$ . Since  $a \rightarrow b = 1,$

$(b \rightarrow 0) \rightarrow (a \rightarrow 0) = 1$ . By Theorem 2.7,  $N(a) = a \rightarrow 0 \geq b \rightarrow 0 = N(b).$

(N3)  $N(N(a)) = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = (0 \rightarrow a) \rightarrow a = 1 \rightarrow a = a$

(2) By (I2),  $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow 0) \rightarrow (a \rightarrow 0)) = 1$ . Hence  $a \rightarrow b \leq N(b) \rightarrow N(a).$

By (I2),  $N(b) \rightarrow N(a) \rightarrow ((N(a) \rightarrow 0) \rightarrow (N(b) \rightarrow 0)) = 1$ . Hence

$$N(b) \rightarrow N(a) \leq N(N(a)) \rightarrow N(N(b)) = a \rightarrow b.$$

**Example 2.12.** (1) Let  $(P(X), \rightarrow, X, \emptyset)$  be an implication with negation  $N$  as

$$N(A) = A \rightarrow \emptyset = A^c \cup \emptyset = A^c.$$

$$N(N(A)) = (A^c)^c = A, \quad A \rightarrow B = A^c \cup B = N(B) \rightarrow N(A).$$

(2) Let  $([0,1], \rightarrow, 0, 1)$  be an implication with  $a \rightarrow b = (1 - a + b) \wedge 1$ . Then

$$N(a) = a \rightarrow 0 = 1 - a.$$

**Theorem 2.13.** Let  $(L, \rightarrow, \perp, \top)$  be an implication. Then the following properties hold.

- (1) If  $x \leq y$ , then  $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ .
- (2)  $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$ .
- (3) If  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$ , then  $y \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$ .
- (4)  $(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ .
- (5)  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$ .
- (6)  $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ .

**Proof.** (1). Let  $x \leq y$  iff  $x \rightarrow y = \top$ . Then

$$\begin{aligned} & (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \\ &= \top \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) = \top. \end{aligned}$$

Hence  $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ .

(2) By (1)  $y \leq \top$ ,  $(\top \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x) = \top$ . Then  $x \rightarrow (y \rightarrow x) = \top$ .

(3) Let  $x \rightarrow (y \rightarrow z) = 1$ , i.e.  $x \leq (y \rightarrow z)$ . Then

$$\begin{aligned} (y \rightarrow z) \rightarrow z &= (z \rightarrow y) \rightarrow y \leq x \rightarrow z. \text{ Since } y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow z, \\ \top &= ((z \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) \leq y \rightarrow (x \rightarrow z). \end{aligned}$$

Thus,  $y \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$ .

(4) Since  $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$ , By (3),

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1.$$

(5) By (4), since  $(y \rightarrow z) \rightarrow z \leq (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$ ,

$$((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z) = 1.$$

Since  $y \leq (z \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow z) \rightarrow z$ , then

$$y \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z) \geq ((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$$

$$y \rightarrow ((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z)) = \top$$

Hence  $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq y \rightarrow (x \rightarrow z)$ . Similarly  $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \geq y \rightarrow (x \rightarrow z)$ .

(6) Since  $x \leq (y \rightarrow x) \rightarrow x$  and  $y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$  and  $(y \rightarrow x) \rightarrow x = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ , then

$$x \vee y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y.$$

Let  $x, y \leq z$ . Then  $x \rightarrow z = \top$  and  $z \rightarrow x \leq y \rightarrow x$ . So,  $(y \rightarrow x) \rightarrow x \leq (z \rightarrow x) \rightarrow x$ . Hence

$$(y \rightarrow x) \rightarrow x \leq (z \rightarrow x) \rightarrow x = (x \rightarrow z) \rightarrow z = z.$$

**Definition 2.14.** A structure  $(L, \odot, \rightarrow, \perp, \top)$  is called a *residuated lattice* if the

following conditions:

- (1)  $(L, \odot, \top)$  is a commutative monoid.
- (2) If  $y \leq z$ , then  $x \odot y \leq x \odot z$ .
- (3)  $x \odot y \leq z$  iff  $x \leq y \rightarrow z$ .

**Theorem 2.15.** Let  $(L, \rightarrow, \perp, \top)$  be an implication and  $N(x) = x \rightarrow \perp$  a negation. Define  $\odot : L \times L \rightarrow L$  as follows:

$$x \odot y = N(x \rightarrow N(y)).$$

Then  $(L, \odot, \rightarrow, \perp, \top)$  is a residuated lattice.

**Proof.** (1) (commutative)  $x \odot y = N(x \rightarrow N(y)) = N(N(N(y)) \rightarrow N(x)) = y \odot x$ .

(associative)

$$\begin{aligned} x \odot (y \odot z) &= x \odot (z \odot y) = x \odot N(z \rightarrow N(y)) \\ &= N(x \rightarrow N(N(z \rightarrow N(y)))) = N(x \rightarrow (z \rightarrow N(y))) \\ &= N(z \rightarrow (x \rightarrow N(y))) = N(z \rightarrow N(N(x \rightarrow N(y)))) \\ &= z \odot (x \odot y) = (x \odot y) \odot z \end{aligned}$$

(identity)

$$x \odot \top = N(x \rightarrow N(\top)) = N(N(N(\top)) \rightarrow N(x)) = N(1 \rightarrow N(x)) = N(N(x)) = x.$$

Hence  $(L, \odot, \top)$  is a commutative monoid.

(2) Let  $x \leq y$  be given. Then  $x \odot z \leq y \odot z$  from:

$$x \rightarrow N(z) \geq y \rightarrow N(z) \text{ iff } N(x \rightarrow N(z)) \leq N(y \rightarrow N(z)).$$

(3) We will show that  $x \odot y \leq z$  iff  $x \leq y \rightarrow z$ .

( $\Rightarrow$ ) It follows from:

$$\begin{aligned} x \odot y = N(x \rightarrow N(y)) \leq z &\text{ iff } x \rightarrow N(y) \geq N(z) \text{ iff} \\ x \leq (x \rightarrow N(y)) \rightarrow N(y) &\leq N(z) \rightarrow N(y) = y \rightarrow z. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Since  $x \leq y \rightarrow z$ , then

$$x \rightarrow N(y) \geq (y \rightarrow z) \rightarrow N(y) = (N(z) \rightarrow N(y)) \rightarrow N(y) \geq N(z).$$

Hence  $x \odot y = N(x \rightarrow N(y)) \leq z$ .

**Example 2.16.** Let  $(L = \{0, 1\}, \rightarrow, 0, 1)$  be given as Example 2.2.

$$p \odot q = p \wedge q = \sim (p \rightarrow \sim q).$$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim (p \rightarrow \sim q)$
1	1	1	0	1

1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

Then  $(\{0,1\}, \odot = \wedge, \rightarrow, 0, 1)$  is a residuated lattice.

**Example 2.17.** Let  $(P(X), \rightarrow, X, \emptyset)$  be implication defined as

$$A \rightarrow B = A^c \cup B, \quad N(A) = A^c.$$

Then  $A \odot B = N(A \rightarrow N(B)) = N(N(A) \cup N(B)) = A \cap B$ .

Hence  $(P(X), \odot = \cap, \rightarrow, X, \emptyset)$  is a residuated lattice.

Put  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ ,  $C = \{2, 3, 6\}$ .

$$A \cap D \subset C \text{ if } D \subset A \rightarrow C = A^c \cup C$$

Then  $D \subset \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ .

**Example 2.18.** Let  $\rightarrow : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  be implication defined as

$$x \rightarrow y = (1 - x^p + y^p)^{1/p} \wedge 1 (p > 0). \quad N(x) = (1 - x^p)^{1/p} (p > 0)$$

$$\text{We obtain } x \odot y = N(x \rightarrow N(y)) = (x^p + y^p - 1)^{1/p} \vee 1 (p > 0)$$

Then  $([0,1], \odot, \rightarrow, 0, 1)$  is a residuated lattice.

### 3. References

- R. Belohlavek (2002), Fuzzy Relational Systems, Kluwer Academic Publishers, New York.
- G. Birkhoff (1968), Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 25, New York.
- C. C. Chang (1958) Algebraic analysis of many valued logics, Trans. of A.M.S., 88(2): 467-490.
- G. Georgescu, Bosbach (2004), states on fuzzy structures, Soft Computing, 8: 217-230.
- G. Georgescu, A. Popescu (2004), Non-commutative fuzzy structures and pairs of weak negations, Fuzzy Sets and Systems, 143: 129-155.
- P. Flonder, M. Sularia (2003), On a class of residuated semilattice monoids, Fuzzy Sets and Systems 138: 149-176.

자연과학(The Journal of Natural Science, GWNU) 제22권 제1호 (통권 제36호) 2016. 12.

P. Hajek (1998), *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

U. Hohle (2001), *Many valued topology and its applications*, Kluwer Academic Publisher, Boston.

U. Hohle, E. P. Klement (1995), *Non-classical logic and their applications to fuzzy subsets*, Kluwer Academic Publisher, Boston.

U. Hohle, S. E. Rodabaugh (1999), *Mathematics of Fuzzy Sets, Logic, Topology and Measure Theory*, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Volume 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

P. J. Johnstone (1982), *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge.

Y.-M Liu (2002), Projective and injective objects in the category of quantales, *J. of Pure and Applied Algebra*, 176; 249-258.

S. E. Rodabaugh, E. P. Klement (2003), *Topological And Algebraic Structures In Fuzzy Sets*, The Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets, Trends in Logic 20 , Kluwer Academic Publishers, (Boston/Dordrecht/London).

E. Turunen (1999), *Mathematics Behind Fuzzy Logic*, A Springer-Verlag Co.

## 졸-겔 방법으로 합성된 전기변색소자의 퍼콜레이션 현상에 의한 효과

김성희<sup>1)†</sup> · 최동수<sup>2)†</sup> · 김재화<sup>1)\*</sup>

<sup>1)</sup>강릉원주대학교 자연과학대학 물리학과, <sup>2)</sup>성균관대학교 첨단소재기술연구소

## The Effect of Percolation Phenomenon in Electrochromic cell Fabricated by Sol-gel method

Sunghye Kim<sup>1)</sup>, Dong Soo Choi<sup>2)</sup>, Jaehwa Kim<sup>1),\*</sup>

<sup>1)</sup>*Dept. of Physics, Gangneung-Wonju National University, Gangneung, 210-702,  
Republic of Korea*

<sup>2)</sup>*Institute of Advanced Materials Technology, Sungkyunkwan University,  
Gyunggido, Republic of Korea,*

**Abstract:** Sol-gel process are applied in various fields of science and engineering. Sol-gel phase transition can be described as percolation. The percolation theory most clearly manifests in a transformation of a liquid polymer solution into gel. We investigated the electrochromic property within the percolation approach in sol-gel process. Tungsten oxide and ITO were selected as electrochromic materials and transparent electrode in electrochromic(EC) cell. The EC cell was characterized by IR Spectroscopy, Transmittance, Microscopy and Scanning Electron Microscope(SEM).

**요약:** 졸-겔 과정은 과학과 공학의 여러 분야에서 응용 되어 왔으며, 퍼콜레이션으로 묘사할 수 있다. 액체 폴리머 용액의 겔로의 변화를 퍼콜레이션 이론으로 명확하게 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 졸-겔 방법을 이용하여 제조하는 전기변색 샘플에서 퍼콜레이션이 전기변색 특성에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 전기변색

---

\* Corresponding Author. E-mail: jhkim@gwnu.ac.kr, Tel: +82-33-640-2292

† These authors contributed equally.

(EC) cell에서 전기변색물질과 투명전극으로 산화텅스텐과 ITO를 사용하였다. aging-time에 따른 전기변색 cell의 특성을 IR 분광법을 이용하여 분석하고, 가시광선 투과도를 측정하였다. 또한 최적화된 전기변색 cell의 표면을 광학현미경과 주사전자현미경(SEM)으로 확인하였다.

**Keywords:** 퍼콜레이션, 졸-겔 방법, aging-time, 산화텅스텐, 전기변색,

## 1. 서론

전기변색은 전기장 하에서 물질의 색깔이 변하는 현상으로, 산화텅스텐은 1973년 Deb에 의해 알려진 이후 가장 효율적인 전기변색물질 중 하나로 연구되고 있다.(Deb *et al.* 1973). 전기변색 박막을 제조하는 방법으로는 진공 스퍼터를 이용하는 방법, 용액을 코팅하는 방법 등이 대표적인데, 특히 무기 혹은 유기 금속 전구체를 용매에 녹여 박막 코팅용액을 만드는 과정에는 졸-겔 과정이 포함된다. 졸-겔 과정은 과학과 공학의 다양한 분야에서 많이 응용되고 있으며(Yang *et al.* 1998, Yang *et al.* 1999, Xia *et al.* 2000), 퍼콜레이션과 졸-겔 과정 사이의 관계에 대한 본격적인 연구는 1976년 Gennes과 Stauffer에 의해 진행되었다(Zallen *et al.* 1983). 퍼콜레이션에서 무한 cluster가 형성되기 시작하는 시점인 퍼콜레이션 임계점  $p_c$  (percolation threshold)는 겔화(gelation)에서 거대분자(macromolecule)가 만들어지는 겔화점(gel point)에 대응 시킬 수 있다. 졸 상태는 원자크기 정도의 분자들만 존재하는 액체 상태인데, 졸-겔 상전이(transition)가 일어나면서 액체의 점성이 증가하는 등 여러 가지 물리적 성질들이 변하게 된다.

졸-겔 과정은 간략하게 재료들의 혼합(Mixing), 겔화(Gelation), 분자들의 결합에 의한 network 형성(Aging), 건조(Drying), 등의 단계로 구성된다. 졸-겔 과정에 대한 관심은 무기 세라믹이나 유리재질 분야에서 시작 되었는데, 1800년대 중반 Ebelman(Ebelman *et al.* 1846, Ebelman *et al.* 1847)이나 Granham(Granham *et al.* 1864)의 실리카겔에 대한 연구가 그 시초이다(Hench *et al.* 1990). 이후 졸-겔 과정에서 퍼콜레이션 특성에 대한 연구가 진행되어 왔지만, Aging 단계에서 network의 형성에 의한 퍼콜레이션이 산화텅스텐 박막의 전기변색 특성에 영향을 미치는지에 대한 연구는 보고되지 않았다. 또한 졸-겔 과정에서 aging 과정의 기계적인 방법에 대해 이론적으로 자세하게 연구한 논문은 잘 알려져 있지 않고, aging 과정이 겔의 구조와 특성에 미치는 효과에 대한 분석 또한 미미하다.

따라서 본 연구에서는 졸-겔 방법으로 전기변색 박막을 제조할 때, 액체상태의 용액 속에서 겔이 형성되는 퍼콜레이션 과정이 전기변색 특성에 영향을 주는지를 살펴보았다. 졸-겔 용액에서 겔의 구조와 성질은 겔화점(gel point)이후 계속 변하게 되는데, 이 과정을 aging이라고 한다. aging 과정동안 중축합반응에 의해 gel network의 형성이 지속적으로 진행되어 network의 connectivity와 fractal dimension이 증가한다(Hench *et al.* 1990). 전기변색 박막을 위한 용액의 aging-time을 제조 1일 후, 1주일 후, 3주일 후와 같이 3가지로 구분하여 aging-time에 따른 용액의 성질과 각 용액으로 제조된 산화텡스텐 전기변색박막의 광학적 성질을 측정하였다.

## 2. 실험

전기변색용 산화텡스텐 박막 제조를 위해 염화텡스텐( $WCl_6$ , 1 g)과 무수 에탄올( $C_2H_5OH$ , 10 ml)을 질소분위기 하의 상온에서 혼합하였다. 혼합 용액은 필터를 이용하여 거르고 하루 정도 상온에 두고 이후  $40\text{ }^\circ\text{C}$ 를 유지하면서 1일, 1주일, 3주일 간격으로 용액상태를 관찰한다. aging 과정을 거치는 동안 적외선 분광법(FT-IR, Bruker IFS-66/S)을 이용하여 용액의 반응 상태를 분석하고, 각 단계에서 전기변색 셀을 제조하여 전기변색 특성을 분석하였다.

전기변색 셀의 제조 방법은 다음과 같다. 먼저, 면저항이  $10\ \Omega/\text{sq}$ 인 ITO(인듐주석산화물)유리를  $3\times 4\ \text{cm}^2$  크기로 자른다. 다음으로 ITO유리를 아세톤 (500 ml)에 넣어 초음파 세척기로 15분간 세척한 후, 에탄올 (500 ml), 증류수 (500 ml) 순으로 세척 과정을 반복하며, 이 때 시간은 각각 15분, 5분을 유지한다. 세척이 끝난 ITO유리는 질소기체를 이용하여 얼룩이 남지 않도록 건조시킨다. ITO유리의 세로 1cm 정도에 캡톤테이프를 붙여 전극 부분을 확보하고 스펀코팅기를 이용하여 2000 rpm의 속도로 코팅한다. 이렇게 제작된 샘플을  $60\text{ }^\circ\text{C}$ 의 핫플레이트에 올려놓고 1분간 안정화 시킨 후, 캡톤테이프를 떼어내고 전기로에 넣고  $3000\text{ }^\circ\text{C}$ 에서 1시간 동안 구워낸다.

전기변색 특성을 확인하기 위해서는 전해질용액에 전기변색 셀을 넣어 실험을 진행하여야 한다. 필요한 전해질 용액의 제조방법은 다음과 같다.

과염소산리튬( $LiClO_4$ , 5.32 g)을 프로필렌 카보네이트( $C_4H_6O_3$ , 500 ml)에 넣고 상온에서 천천히 저으면서 용해시킨다.

이렇게 제조한 전해질 용액에 전기변색 셀을 담근 후 셀의 한쪽에 (-)전극을 걸어주고, 반대쪽은 구리를 이용하여 (+)전극을 연결하여 착색, 탈색의 전기변색 현상을 관찰한다. 전기변색 특성을 측정하기 위하여 샘플의 가시광선영역에서 투과도

(UV-3600, SHIMADZU UV-VIS-NIR spectrophotometer)를 측정하였다. 또한, 광학현미경(BIMENCE)과 주사전자현미경(SEM)을 이용하여 산화텅스텐박막의 표면 상태를 확인하였다.

### 3. 결과 및 토의

졸-겔 방법에 의해 염화텅스텐(WCl<sub>6</sub>)과 에탄올을 이용해 서로 다른 aging-time 을 적용한 3가지의 산화텅스텐 박막을 제조하였다. 전체 반응은 다음과 같이 묘사할 수 있다.

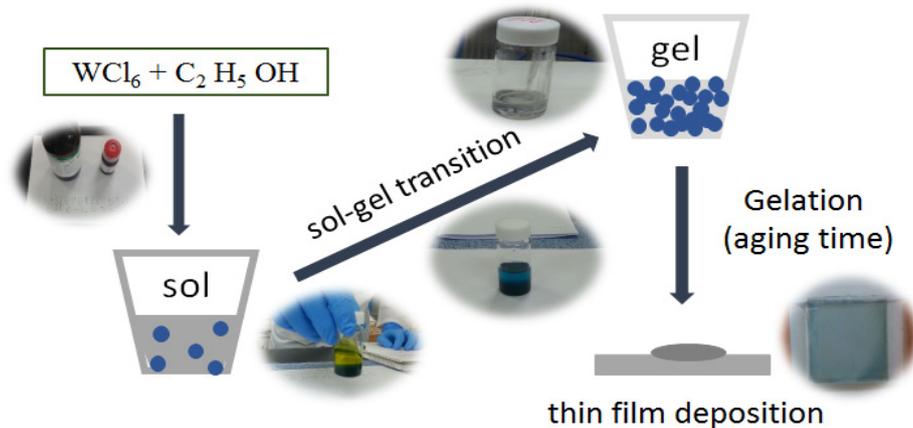


Figure 1. Scheme of the process for EC film fabrication by sol-gel method.

염화텅스텐과 에탄올을 섞은 용액은 바로 밝은 노란색이 되었다가, 수분 내로 에탄올에 의해 W<sup>6+</sup> 부분이 W<sup>5+</sup>로 바뀌면서 푸른색으로 변하게 된다. 이것은 염화텅스텐이 에탄올에 녹으면서 염소가 발생하기 때문이다(Klejnot *et al.* 1965). 서서히 반응이 더 진행되면 가수분해에 의해 텅스텐 bronze가 형성되면서 용액의 색은 푸른색으로 변했다가 다시 투명하게 변한다(Badilescu *et al.* 2003)(그림1). 투명해지는 이유는 염화텅스텐의 염소 부분이 모두 에탄올의 알킬기로 치환되기 때문이다.

aging 과정동안 점진적으로 용액의 상태가 졸에서 겔로 변화하면서 겔화점에 도달하게 되면 퍼콜레이션 시점에 도달되었다고 볼 수 있다. aging 과정을 1일, 1주일, 3주일로 구분하여 용액을 변화를 알아보기 위해 FT-IR 분석을 시행하였다(그림2). 650 cm<sup>-1</sup>의 짧은 파장 영역에서 피크가 관찰 되는데, 이것은 W-O 결합의 신

축진동(stretching vibration)에 의한 흡수(absorption)의 증가로 볼 수 있다(NISHIO *et al.* 1999). aging time 1일 용액의 FT-IR 스펙트럼에서 W-O 결합의 신축진동에 의한 흡수의 양은 적게 나타났으며, aging-time 1주일과 3주일 용액에서는 더 크게 나타났다. aging 과정동안 W-O 결합이 많아진 것으로 생각된다. 또한 aging-time 이 길어지면서  $950\text{ cm}^{-1}$  근처의 피크가 거의 없어지는데, 이것은 텅스텐과 산소의 이중결합(W=O)의 대칭적 신축진동과 관계가 있다(Ozer *et al.* 1997).

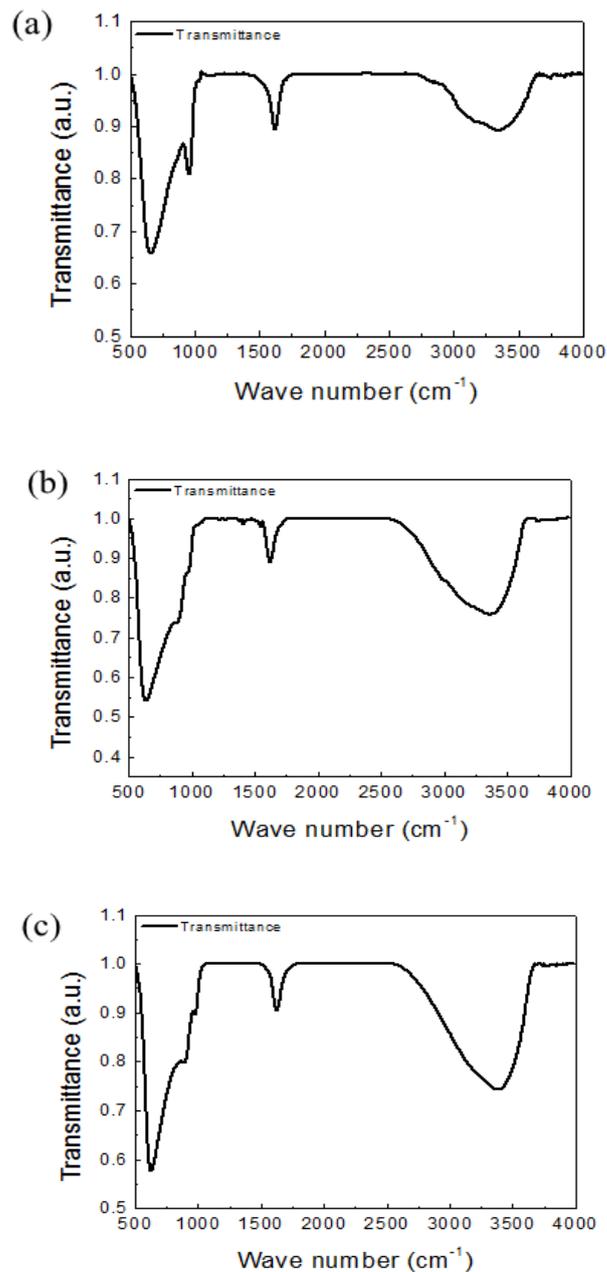
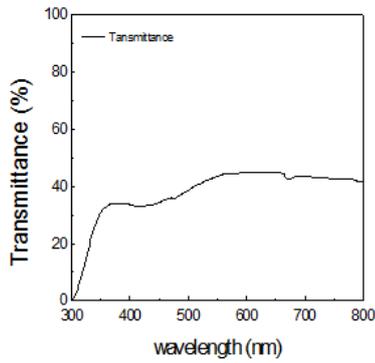
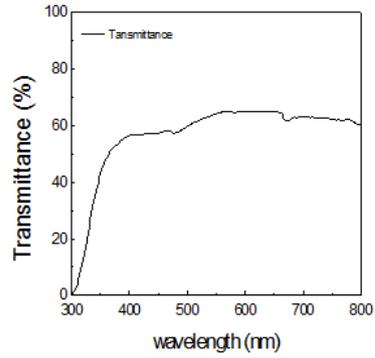


Figure 2. FTIR spectra of WO<sub>x</sub> depending on aging-time.

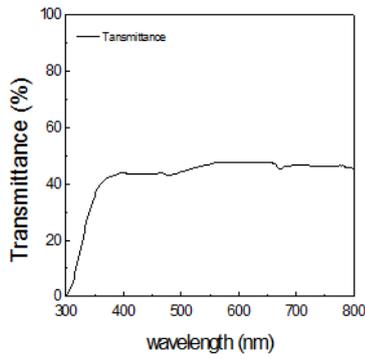
(a) 1day, (b) 1weeks, (c) 3weeks



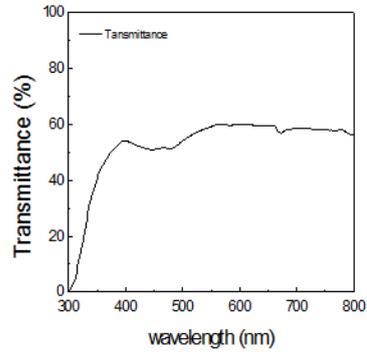
(a.1) 1day - colored state



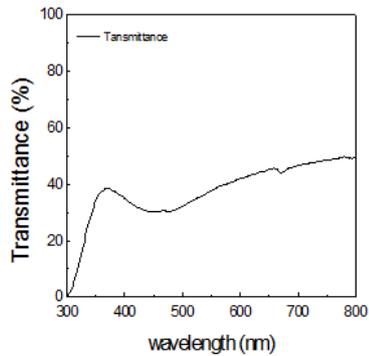
(a.2) 1day - bleached state



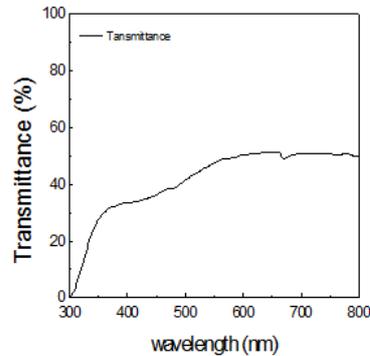
(b.1) 1weeks - colored state



(b.2) 1weeks - bleached state



(c.1) 3weeks - colored state



(c.2) 3weeks - bleached state

Figure 3. Transmittance of tungsten oxide thin film dependings on aging time.

반응이 진행됨에 따라  $3500\text{ cm}^{-1}$  근처의 피크가 점점 커지는 현상을 볼 수 있는데, aging 과정동안 겔화가 진행되면서 용액의 점성이 증가하는 것과 관련이 있어 보인다(NISHIO *et al.* 1999).

aging-time에 따라 전기변색 특성을 살펴보기 위해 각 단계에서 산화텨스텐 박

막을 제조하고 투과도를 측정하여 전기변색 특성을 확인하였다(그림3).

가시광선 영역(파장 300nm에서 800nm 범위)에서 투과도를 측정하였다. 파장 550nm에서 착색된 박막의 투과도는 47%에서 37.8%까지 감소되었다. 전기변색 특성이 가장 좋은 샘플을 선택하여 표면 상태를 분석하였다. (그림4)는 ITO 유리위에 제조한 산화텅스텐 박막의 광학현미경과 주사현미경 사진이다. 산화텅스텐 박막의 표면에 틈이 많이 보이는데 이 공간을 통해 전해질내의 리튬이온이 침투하여 전기변색 현상이 발생하게 된다.

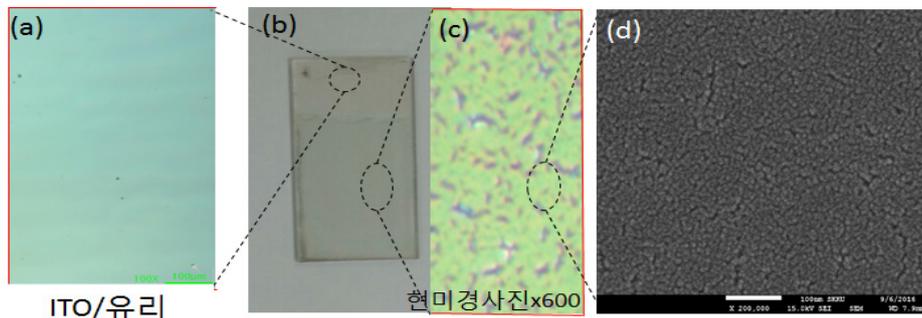


Figure 4. The image of the surface of EC cell : (a) Optical image of ITO, (b) Image of the EC cell sample( $WO_x$ /ITO glass), (c) Optical image( $\times 600$ ), (d) SEM image( $\times 200,000$ ) of tungsten oxide film.

#### 4. 결론

졸-겔 방법에 의한 전기변색 박막의 제조에서 퍼콜레이션 이론과의 연관성을 알아보았다. 염화텅스텐과 에탄올을 이용해 서로 다른 aging-time을 적용한 3가지의 산화텅스텐 박막을 제조하였다. 전기변색 박막 제조를 위한 용액에서는 aging-time에 따라 겔 network의 형성 정도가 달라진다. 염화텅스텐과 에탄올이 점진적으로 반응하면 텅스텐과 산소의 결합에 변화가 생기면서 점성의 증가와 함께 겔화가 진행된다. 용액이 겔화되는 시점은 거대한 겔 network이 형성되어 퍼콜레이션이 이루어진 상태로 볼 수 있다. aging-time이 다른 3가지의 산화텅스텐 박막의 제조를 통해 전기변색 셀을 제작하여 전기변색과 광학적 특성을 측정함으로써 퍼콜레이션 이후 성숙정도에 따른 전기변색 박막의 성질을 비교해 볼 수 있었다. aging-time 1일인 푸른색의 박막 용액은 FT-IR 스펙트럼에서 W-O 결합의 수축진동에 의한 흡수의 양은 적게 나타남을 확인했으며, 파장 550nm에서 투과율이 43.5%로 나타났다.

aging-time 3주일인 투명 박막 용액은 FT-IR 스펙트럼에서 W-O 결합의 수축진동에 의한 흡수의 양은 크게 나타났고, 파장 550nm에서의 투과율은 37.8%까지 감소되었다.

## 감사의 글

이 연구는 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었으며(No. 2015R1C1A2A01054433), 일부는 2016년도 강릉원주대학교 교수연구년지원을 받아 진행 되었습니다.

## 5. 참고문헌

- C. J. Brinker (1994) Sol-gel strategies for controlled porosity inorganic materials. *Journal of Membrane Science* 94:85-102
- Keishi NISHIO, Tadanori SEI, Toshio TSUCHIYA (1999) Preparation of Electrochromic Tungsten Oxide Thin Film by Sol-Gel Process. *J. of Ceram. Soc. of Jpn.* 107[3]:199-203
- L. Hench, Jon K. West (1990) The Sol-Gel Process: *Chem. Rev.* 90:33-72
- M. Ebelman (1846) Untersuchungen uber die Verbindung der Borsaeure und Kieselsaeure mit Aether. *Ann. Chimie Phys.* 16, 129
- M. Ebelman (1847) Sur l'hyalite artificielle et l'hydrophane. *C. R. Acad. Sci.* 25, 854
- N. Ozer (1997) Optical and electrochemical characteristics of sol-gel deposited tungsten oxide films: a comparison. *Thin Solid Films* 304:310-314
- O. J. Klejnot (1965) Chloride Alkoxides of Pentavalent Tungsten. *Inorganic Chem.* 4:1668-1670
- P. Yang, D. Zhao, D.I. Margolese, B.F. Chmelka, G.D. Stucky (1998) Generalized syntheses of large-pore mesoporous metal oxides with semicrystalline frameworks. *Nature* 396:152-155
- P. Yang, D. Zhao, D.I. Margolese, B.F. Chmelka, G.D. Stucky (1999) Block Copolymer Templating Syntheses of Mesoporous Metal Oxides with Large Ordering Lengths and Semicrystalline Framework. *Chem. Mater* 11:2813-2826
- R. Zallen (1983) The Physics of Amorphous Solids. John Wiley & Sons
- S. Badilescu, P.V. Ashrit (2003) Study of sol-gel prepared nanostructured WO<sub>3</sub> thin films and composites for electrocheomic applications. *Solid State Ionics* 158:187-197.
- S. K. Deb (1973) Optical and photoelectric properties and colour centres in thin films of

tungsten oxide. *Philos. Mag.* 27:801-822

T. Granham (1864) On the properties of silicic acid and other analogous colloidal substances. *J. Chem. Soc.* 17, 318

Y. Xia, B. Gates, Y. Yin, Y. Lu (2000) Monodispersed Colloidal Spheres: Old Materials with New Applications *Adv. Mater* 12(10):693

## 음이항 분포에 관한 연구

이영훈

강릉원주대학교 자연과학대학 정보통계학과

### A Study on the Negative Binomial Distribution

Young-Hoon Lee

*Dept. of Information Statistics, Gangneung-Wonju National University,  
Gangneung, 25457, Korea*

**Abstract:** Methods of calculating the factorial moments, mean, and variance of the negative binomial distribution are examined, and a new method is suggested.

**요약:** 음이항 분포의 계승적률, 평균, 분산을 계산하는 기존의 알려진 방법들을 살펴보고 새로운 계산 방법을 제시하고자 한다.

**Keywords:** 음이항 분포, ascending factorial moment, descending factorial moment

#### 1. 서론

성공 확률이  $p$ 인 베르누이 시행을 독립적으로 반복할 때,  $r$  번째 성공할 때까지의 시행 횟수를 나타내는 확률변수  $X$ 의 분포를 음이항 분포라 하고  $X \sim \text{NB}(r, p)$ 로 쓴다.  $X$ 의 확률질량함수는  $q = 1 - p$ 라 하면

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \quad x = r, r+1, r+2, \dots$$

이다. 대부분의 통계학 책들이 확률변수  $X$ 의 평균, 분산을 구하기 위해 적률 생성함수  $M(t) = E(e^{tX})$ 를 이용하고 있다. 그러나 음이항 분포의 평균, 분산을 구하는 방법들은 여러 가지이다.

본 논문에서는 음이항 분포의 평균, 분산을 구하는 여러 방법들을 모아 정리해서 설명하고, 저자가 생각해 낸 방법도 소개하고자 한다.

## 2. Descending factorial moments를 이용

(방법 1)

Descending factorial moment 생성 함수  $G(t) = E(t^X)$ 을 계산하면

$$G(t) = \left( \frac{pt}{1-qt} \right)^r \quad (\text{단, } |t| < \frac{1}{q})$$

이다. 확률변수  $X$ 의 1차, 2차 descending factorial moment는 각각

$$E(X) = G'(1) = \frac{r}{p}$$

$$E[X(X-1)] = G''(1) = \frac{r(r+q-p)}{p^2}$$

이고, 확률변수  $X$ 의 분산은

$$\text{Var}(X) = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{rq}{p^2}$$

이다.

(방법 2)

이 방법은 저자가 생각해 낸 것이다.

$$\sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = 1$$

에서  $q^x$ 을  $z^x$ 으로 바꾼 후  $p^r q^{-r}$ 을 제외한 부분을  $h(z)$ 라 하면

$$h(z) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} z^x = \left( \frac{z}{1-z} \right)^r \quad (\text{단, } |z| < 1)$$

임을 보일 수 있다.  $h(z)$ 를  $z$ 에 대해 미분하면

$$h'(z) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} z^{x-1} = \frac{rz^{r-1}}{(1-z)^{r+1}}$$

$$h''(z) = \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1) \binom{x-1}{r-1} z^{x-2} = \frac{z^{r-2} r(r-1+2z)}{(1-z)^{r+2}}$$

이다. 이 결과를 이용하면

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = p^r q^{1-r} \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} q^{x-1} = p^r q^{1-r} h'(q) = \frac{r}{p}$$

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1) \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = p^r q^{2-r} \sum_{x=r}^{\infty} x(x-1) \binom{x-1}{r-1} q^{x-2} \\ &= p^r q^{2-r} h''(q) = \frac{r(r+q-p)}{p^2} \end{aligned}$$

이므로 (방법 1)과 결과가 같다.

### 3. Ascending factorial moments를 이용

(방법 1)

$$\sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = 1$$

이 되는 원리를 이용하면 확률변수  $X$ 의  $k$ 차 ascending factorial moment가

$$\begin{aligned} E[X(X+1) \cdots (X+k-1)] &= \sum_{x=r}^{\infty} x(x+1) \cdots (x+k-1) \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\ &= \frac{r(r+1) \cdots (r+k-1)}{p^k} \end{aligned}$$

임을 보일 수 있다. 특수한 경우로

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r}{p} \\ E[X(X+1)] &= \frac{r(r+1)}{p^2} \end{aligned}$$

이므로 확률변수  $X$ 의 분산은

$$\text{Var}(X) = E[X(X+1)] - E(X) - [E(X)]^2 = \frac{rq}{p^2}$$

이다.

(방법 2)

Ascending factorial moment 생성 함수

$$H(t) = E\left[\left(\frac{1}{1-t}\right)^X\right] = G\left(\frac{1}{1-t}\right) = p^r (p-t)^{-r} \quad (\text{단, } |t-1| > q)$$

을 이용하면 확률변수  $X$ 의 1차, 2차 ascending factorial moment는 각각

$$\begin{aligned} E(X) &= H'(0) = \frac{r}{p} \\ E[X(X+1)] &= H''(0) = \frac{r(r+1)}{p^2} \end{aligned}$$

이고, 더 나아가 확률변수  $X$ 의  $k$ 차 ascending factorial moment

$$E[X(X+1) \cdots (X+k-1)] = H^{(k)}(0) = \frac{r(r+1) \cdots (r+k-1)}{p^k}$$

도 쉽게 계산된다.

#### 4. Factorial moments 계산 없이 분산 계산

(방법 1)

확률변수  $X$ 의 적률 생성 함수는

$$M(t) = E(e^{tX}) = G(e^t) = \left( \frac{pe^t}{1-qe^t} \right)^r \quad (\text{단, } t < -\ln q)$$

이다.  $M(t)$ 를 미분하는 것보다 확률변수  $X$ 의 누가 적률 생성 함수

$$K(t) = \ln M(t)$$

를 미분하여

$$E(X) = K'(0) = \frac{r}{p}$$

$$\text{Var}(X) = K''(0) = \frac{rq}{p^2}$$

로 계산하는 것이 훨씬 편리하다.

(방법 2)

음이항 분포의 확률질량함수가 one-parameter exponential family를 이루므로 natural parameter의 성질을 이용하여 음이항 분포의 평균, 분산을 구할 수 있다. (Lehmann & Casella, 1998)

(방법 3)

성공 확률이 똑같이  $p$ 인 기하분포를 따르면서 서로 독립인 확률변수들  $r$ 개를 더한 것의 분포가 음이항 분포  $NB(r, p)$ 이므로, 이 성질을 이용하여 음이항 분포의 평균, 분산을 구할 수 있다.

#### 5. 결론

음이항 분포의 계승적률, 평균, 분산을 계산하는 기존의 알려진 방법들을 모아 정리해서 살펴보고, 저자가 생각해 낸 새로운 계산 방법을 제시하였다.

연구하면 또 새로운 방법이 있을 것으로 기대한다.

## 6. 참고 문헌

Lehmann E. L., Casella G. (1998) Theory of Point Estimation 2<sup>nd</sup> Edition.  
Springer-Verlag.

## 저자 안내 (Author Guides): 논문투고규정, 원고 작성 기준, 원고 표준 양식

### [1] 자연과학논문집의 투고규정

#### 1. 투고자격:

- 1) 본 연구소 연구원이 주-저자 또는 공동 저자인 경우로 제한함을 원칙으로 한다. 그러나 초청 논문의 경우 또는 기타 필요에 따라 편집위원회의 의결을 거쳐 별도로 투고 자격을 부여할 수 있다.
- 2) 본 연구소의 각 연구원은 자신이 주-저자인 논문은 각 호당 1편까지만 투고할 수 있으며, 공동 저자로 참여하는 논문을 1편까지만 더 (공동저자로만 참여하는 경우에는 2편까지) 투고할 수 있다. 즉 각 호당 총 2편까지 투고 가능하다.
- 3) 본 연구소 연구원이 저자로 참여하지 않은 경우에도, 본 연구소 연구원 2인 이상이 본 논문집의 성격에 부합하는 논문이라고 추천하는 경우에는 투고할 수 있다.

#### 2. 논문원고: 다른 학술잡지에 발표되지 않는 연구논문(article), 총설(review), 속보(Communication)와 단문(note)을 포함한다.

#### 3. 논문제출 및 접수일: 편집위원회에서 정한 기일까지 논문원고를 전자우편으로 편집위원장에게 제출한다. 논문이 도착된 날짜를 접수일로 한다.

#### 4. 논문양식

- 1) 원고의 작성은 컴퓨터를 이용한 워드프로세서(HWP와 MS-WORD)를 이용하여 한글 또는 영문으로 작성하며, 편집위원회에서 정한 표준 형식(Template)을 사용하여야 하며, 논문집이 인쇄되었을 때의 형태 그대로 원고를 작성하여 투고하여야 한다. 즉 모든 표와 그림은 투고한 내용 그대로 직접 출판할 수 있도록 원고의 본문 안에 배치하며 표와 그림의 설명문(Caption)도 적합한 위치에 포함시켜야 원고를 작성하여야 한다.
- 2) 논문형식에서 한글(영문)제목, 한글(영문) 저자명과 소속, 한글(영문) 요약문(Abstract), Keywords, 본문(서론, 본론, 결론, 등), 사사(Acknowledgement), 참고문헌(References) 등의 순서와 세부 양식은 편집위원회에서 통일시킨 양식‘논문작성기준’ 및 ‘표준형식(Template)’을 따른다.
- 3) 논문은 흑백 인쇄를 원칙으로 하며, 원색판(Color) 사용 시에는 추가되는 비용은 저자가 부담하여야 한다.

#### 5. 심사:

- 1) 투고자는 적합한 심사자를 1인 또는 2인까지 추천할 수 있으며, 필요하다면 심사자에서 제외하여야 하는 사람을 명시할 수 있다. 그러나 심사자의 최종 선택은 편집위원회에서 정한다.

- 2) 투고된 원고는 편집위원회에서 정하는 과정에 따라 **2인 이상의 심사**를 거친다.
  - 3) 심사자는 심사의뢰를 받은 후 3일 이내에 심사할지 여부를 통보하여야 하며, 심사기간은 2주일을 원칙으로 한다. 심사기간이 더 필요한 경우에 그 사유를 편집위원장에게 미리 통보하면 1주일 더 연장할 수 있다.
  - 4) 심사자에 의한 교정/정정/개정 요구가 있는 경우, 주-저자는 이를 통보받은 후 1주 안에 이에 대하여 답하여야 함을 원칙으로 한다. 기간이 더 필요한 경우에는 편집위원장의 승인을 받아 1주일 더 연장할 수 있다. 심사자에 의한 교정/정정/개정 요구에 대한 저자의 적합한 대응이 없으면 논문 게재가 거부될 수 있다.
  - 5) **게재 원고는 반환하지 않음**을 원칙으로 한다.
  - 6) 심사 과정을 거쳐 채택된 후, 교정쇄(Galley Proof)의 교정은 인쇄상의 오류에 대한 것만 인정되며, 그 이상의 교정은 편집위원회의 승인을 거쳐야 한다. 교정쇄를 전달받은 저자는 이를 4일 안에 회신하여야 하며, 회신이 없는 경우 교정 내용이 없는 것으로 처리한다.
6. **게재순서**는 총설(Review)들을 앞에, 일반연구논문(Article)들을 뒤에 배치하되, 각 종류 안에서는 투고된 논문이 접수된 날짜순으로 한다.
7. **별쇄본**: **별쇄본은 제공하지 않으며**, 최종 pdf 파일을 제공하는 것으로 대신한다.
8. **기타** : 본 규정에 없는 사항은 편집위원회에서 결정한다.

## [2] 자연과학논문집의 원고 작성 기준

### 1. 규격 및 순서

- 1) 원고는 한글2007 이상 또는 MS word를 사용하여 국문(국한문혼용) 또는 영문으로 작성하며 논문 투고는 전자우편으로 제출한다. 원고는 A4용지(21×30cm) 규격에서 위쪽은 35 mm(여백 25와 머리말 15), 아래쪽은 30 mm(여백 15와 꼬리말 15)씩, 제본 여백은 0 mm, 좌우 여백은 30 mm로 하여 작성한다. 글자모양은 신명조, 줄 간격은 180%, 글자크기는 다음 수치로 표시된 폰트로 한다. (논문제목-16, 저자명-13, 소속학과명-11, 서론, 본론, 결과 및 토의 등 주 절의 제목은 13포인트 굵은 글씨체, 그리고 나머지 모든 글씨들은 11포인트로 함을 원칙으로 한다.)
- 2) 본문이 한글인 경우 한글제목, 한글 저자명과 소속, 영문제목, 영문 저자명과 소속, 영문 요약문(Abstract), 한글요약문, Keywords, 본문(서론, 본론, 결론, 등), 사사표시(Acknowledgement), 참고문헌(References)의 순으로 함을 원칙으로 한다. 본문이 영문인 경우에는 영문제목, 영문 저자명과 소속, 한글제목, 한글 저자명과 소속, 한글요약문, 영문요약문(Abstract), Keywords, 본문(서론, 본론, 결론, 등), Acknowledgement, References의 순으로 한다. 저자의 소속기관(주소포함)은 저자명 밑에 표기한다. 공동저자의 소속기관이 다를 때는 해당 저자명 오른쪽에 <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>를 하고 따로 따로 표기하며 저자명은 full name으로 하되 family name을 뒤로 한다.

- 3) 주-저자(Corresponding Author)의 이름에 위첨자로 \*표시를 하고, E-mail 주소와 전화번호는 제1면의 하단에 줄을 긋고 표기한다. 표준양식(Template) 참조.
- 4) ABSTRACT는 300단어 이내의 분량으로 하며, 논문을 대표하는 주요단어(Keyword) 5개 이내를 (영문 또는 국문으로) ABSTRACT 하단에 (본문 시작 앞에) 표기한다.
- 5) 본문의 내용을 구분할 때에는 소제목을 부여하며 1., (1), 1), ①, ..... 순으로 표기함을 원칙으로 한다. (표준 양식(Template)를 참고.)

## 2. 표·그림·사진

- 1) 표, 그림 및 사진의 **제목(Caption)과 설명은 영문으로 기술하되**, 본문을 참조하지 않아도 내용을 알 수 있도록 명확하면서도 간결하게 작성한다. 순서 번호는 1, 2, 3의 아라비아 숫자로 표기함을 원칙으로 한다.
- 2) 표, 그림 및 사진은 위의 '규격 및 순서'의 1)항에서 설명한 규격 안에서 가로로 표시되도록 크기를 조정하여 작성하여야 하며, **투고한 내용 그대로 직접 출판할 수 있도록 원고의 본문 안에 배치하여야 한다.**
- 3) 표의 제목은 상단에 표기하고, 그림 및 사진의 제목은 하단에 표기하며, 제목의 첫머리 글자는 대문자로 하고 끝에는 마침표(.)를 찍는다.

## 3. 참고문헌

- 1) 참고문헌을 본문에서 표시할 때는 괄호 안에 제1-저자의 성(Family Name)과 연도를 적어 표시한다. 예: (Shon *et al.* 2010)
  - 2) 본문 뒤(사사 표시 뒤)에 인용문헌들을 모아서 표기하는 부분에는 **저자명을 알파벳순으로 열거하며** 잡지는 저자명, 연도, 제목, 학술지명, 권(호) 및 쪽수로, 단행본은 저자명(또는 역자명), 연도, 저서명, 출판서명, 출판처, 면수로 한다. 단일 단어로 된 잡지명을 제외하고는 약어로 표기한다. **학술지명과 저서명은 이탤릭체로** 표기한다.
    - ① 잡지에 실린 논문의 경우: Author AB, Author CD (2005) Title of article. *Plant Mol Biol* 50:100-110.
    - ② 책에 실린 논문의 경우  
Author AB, Author CD (2005) Title of article. In: Author EF, Author GH, (eds), *Title of Books*, Ed2, Vol3, Publisher, City, pp 15-30.
    - ③ 학위논문 또는 단행본 전체를 이용할 경우  
Author AB, Author CD (2005) Title of thesis. University, City
  - 2) 동일저자의 문헌이 2번 이상 반복될 때는 연차순으로 표기하며 동일저자의 동년 발행논문은 연도 다음에 a, b, c로 표시하여 구분한다.
  - 3) 본문중의 문헌인용은 다음과 같이 표기한다.
    - ①1인 저자의 경우 : Cho(1990) 또는 (Cho, 1990)
    - ②2인 저자의 경우 : Park & Lee(1991) 또는 (Park & Lee, 1991)
    - ③3인 이상 저자의 경우 : Kim *et al.* (1995) 또는 (Kim *et al.*, 1995)
- ※ 기타 위에 언급되지 않은 사항에 대해서는 가장 최근 발간된 본 논문집의 영문 및 국문 논문을 참고하여 작성한다.

### [3] 원고 표준 양식(Template)

논문집 '자연과학'에 투고할 원고의 표준 양식

김OP<sup>1)\*</sup> · 이ST<sup>1)</sup> · 박XY<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>강릉원주대학교 자연과학대학 물리학과, <sup>2)</sup>한국 대학교 자연과학과

## Template of Manuscripts for the Journal of Natural Science, GWNU

Ooo-Ppp Kim<sup>1)\*</sup>, Sss-Ttt Lee<sup>1)</sup> and Xxx-Yyy Park<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*Dept. of Physics, Gangneung-Wonju National University, Gangneung, 210-702, Korea*

<sup>2)</sup>*Dept. of Natural Science, Hankuk University, Seoul, 100-100, Korea*

**Abstract:** It is the template of manuscripts for 'The Journal of Natural Science, GWNU.' This template is a version determined at the end of 2012.

**요약:** 이것은 자연과학연구소에서 이번 2012년 후반기에 복간하게 되는 논문집인 '자연과학'에 투고되는 원고들에 대한 표준양식이다. 이 표준 양식은 2012년 말에 정해진 것이다.

**Keywords:** 자연과학, GWNU, 표준양식, Template,

### 1. 서론

2002년부터 국내의 7개 지역대학들이 연합하여 발간해 오던 '자연자원연구논문

---

\* Corresponding Author. E-mail: opkim@gwnu.ac.kr, Tel: +82-33-640-1234.

집(Journal of Basic and Life Resources Science)’이 2010년 12월의 마지막 발간을 끝으로 폐간된 후, 우리 연구소 자체의 논문집을 발행할 것인지에 대한 논의가 지난 2011년부터 지속되어 왔다(Kim & Park, 2011). 자체 논문집 발간의 의미와 목적에 대한 회의가 적지 않으며, 그 필요성에 대한 논란이 분분하였다. 적극 추진하는 의견이 그다지 강한 것은 아니지만, 자체 논문집 발간을 희망하는 분위기가 전혀 없는 것은 아니며, 또한 연구소 존립의 명분에 관련된 사항이라는 의견도 있다. 지난 2012년 9월에 개최된 3차 운영위원회에서는 일단 논문집 발간을 추진하기로 최종 결정하였다(Choi *et al.*, 2012).

## 2. 이론 배경과 연구 방법

### (1) 경과보고

강릉원주대학교의 자연과학연구소(이하 ‘본 연구소’)는 1985년 3월 설립되었고 1990년 3월 법정연구소로 전환되었다(Lee & Jeung, 1990; Kwon *et al.*, 2001). 본 연구소에서는 1985년부터 2001년까지 자연과학 분야 학술논문지로서“自然科學”지를 매년 2회씩 발간해왔다. 그러나 2002년부터 전국 7개 국공립대학이 연합하여 공동 학술지인“자연&자원연구”지를 발간함에 따라 본 연구소에서 발행해오던“自然科學”지는 2001년 6월에 17권 1호(통권 31호)로 종간하고 자연과학 연구소의 편집위원회는 해산되었다(Yoon, 2002; Author-1, 2004).

### (2) 재 발간 계획

자연자원연구논문집이 2010년 12월 발간을 끝으로 종간함에 따라, 그에 따른 후속 조치에 대하여 2011년 여름부터 여러 방향으로 논의를 계속하였다. 그 결과, 2001년 6월에 제17권 제1호(통권 제31호)를 끝으로 종간하였던 논문집 “自然科學”을 복간하는 개념으로 2012년 후반기에 제18권 제1호(통권 제32호)부터 재발행을 시작하기로 결정하였다(Baeck, 2012). 전반기와 후반기로 나누어 년 2호씩 발행함을 원칙으로 하지만, 전반기에 접수된 원고의 편수가 기준 편수에 미달한 경우, 발행을 생략하고 다음 후반기에 합하여 발행할 계획이다. 기준 편수는 운영위원회(편집위원회)에서 따로 정한다. 그러나 편수에 무관하게 1년에 최소 한번은 발행할 예정이다.

### 3. 실험 결과 및 토의

#### (1) 투고자격

본 연구소 연구원이 주-저자 또는 공동 저자인 경우로 제한함을 원칙으로 한다. 그러나 초청 논문의 경우 또는 기타 필요에 따라 편집위원회의 의결을 거쳐 자격을 부여할 수 있다. 본 연구소의 각 연구원은 자신이 주-저자인 논문은 각 호당 1편까지만 투고할 수 있으며, 공동 저자로 참여하는 논문을 1편까지만 더 투고할 수 있다. 즉 각 호당 총 2편까지 투고 가능하다. 또한 외부 연구자의 투고 가능성을 열어주기 위하여, 본 연구소 연구원이 저자로 참여하지 않은 경우에도, 본 연구소 연구원 2인 이상이 본 논문집의 성격에 부합하는 논문이라고 추천하는 경우에는 투고할 수 있도록 정하였다.

#### (2) 원고의 종류와 접수 및 양식

다른 학술잡지에 발표되지 않는 연구논문(Article)과 총설(Review)로 제한하고, 속보(Communication)와 단문(Note)은 접수하지 않는다. 편집위원회에서 정한 기일까지 논문원고를 전자우편으로 편집위원장에게 제출하며, 논문이 도착된 날짜를 접수일로 한다. 원고의 작성은 컴퓨터를 이용한 워드프로세서(HWP와 MS-WORD)를 이용하여 한글 또는 영문으로 작성한다. (편집위원회에서 정한 표준 형식(Template)를 사용하여야 하며,) 논문집이 인쇄되었을 때의 형태 그대로 원고를 작성하여야 하며, 세부 사항은 별도의 '원고 작성 기준'(Baek *et al.*, 2012)과 이 '표준양식(Template)'을 참고한다.

#### (3) 심사 과정 및 기타 사항들

- 1) 투고된 원고는 편집위원회에서 정하는 과정에 따라 2인 이상의 심사를 거쳐야 하며, 수정지시와 채택여부는 편집위원회에서 정한다(Author-3, 2007).
- 2) 투고자는 적합한 심사자를 2인 이내로 추천할 수 있으며, 필요하다면 심사자에서 배제하여야 하는 사람을 명시할 수 있다. 그러나 심사자의 최종 선택은 편집위원회에서 정한다.
- 3) 심사자에 의한 교정/정정/개정 요구가 있는 경우, 주-저자는 이를 통보받은 후 1주일 안에 이에 대하여 답하여야 하며, 그렇지 않은 경우에는 논문 게재가 거부될 수 있다.
- 4) 게재 원고는 반환하지 않음을 원칙으로 한다.
- 5) 별쇄본은 제공하지 않으며, pdf 파일로 대신한다.
- 6) 기타 자세한 사항은 '원고 작성 기준'(Baek *et al.*, 2012)에서 설명한다.

#### 4. 요약 및 결론

본 논문집의 발간이 연구소의 활성화에 기여할 수 있을 것이며, 앞으로의 발전에 한 계기가 될 수도 있을 것으로 기대한다.

이번 복간은 비교적 늦게 2012년 9월에 확정되었기 때문에 접수된 원고의 수가 많지 않으며, 본 연구소의 운영위원들이 주로 참여하였다는 아쉬움이 있다.

#### 감사의 글

이 표준양식에 관하여 여러 의견을 표시해준 교수님들과 운영위원님들에게 감사드린다. 또한 본 연구소 운영비용에 지원하여 준 강릉원주대학교 교무처와 산학협력단 관계자들에게 감사드린다.

#### 5. 참고문헌

Author-1 AB, Author-2 CD (2004) Title of article. *Plant Mol Biol* 50:100-110. (학술지 논문 경우에 대한 예.)

Author-3 EF, Author-4 GH (2007) Title of article. In: Author EF, Author GH, (eds), *Title of Books*, Ed2, Vol3, Publisher, City, pp 15-30. (책에 실린 논문의 경우.)

Baeck KK, (2012) 제4차 운영위원회 회의록.

Baeck KK, Choi SJ, Kim KJ, Kim JH, Jeung DB, Kim BM and Kim BG (2012) 자연과학논문집 원고작성기준. 강릉원주대학교 자연과학연구소, 강릉시.

Choi SJ, Ahn DW, Jeung DB, Kim BK and Baeck KK (2012) Title of thesis. University, City. (학위논문 또는 단행본 전체를 이용할 경우.)

Kim JH and Park JK (2011) 논문의 제목. *학술지 이름 권-번호:시작페이지-끝페이지*.

Kwon AH, Baeck KK and Kim BM (2001) Studies on the Asian eupatoris I. *Plant Species Biol.* 1: 99-116.

Lee JH and Jeung JK (1990) 논문의 제목. *학술지 이름 권-번호:2891-2912*.

Yoon BJ (2001) Anomalous Properties of Water as the Result of Quantum Effects *J. Chem. Phys.* 271:4231-4241.

------(표준양식의 끝)-----



---

편집위원회

---

편집위원장: 손성익

	오주목(수학)	이영훈(정보통계)
편집위원:	안동완(물리)	김용주(화학신소재)
	이창호(생물)	권태영(대기)

---

---

강릉원주대학교 자연과학연구소 논문집  
자연과학(The Journal of Natural Science, GWNU) <비매품>  
제22권 제1호 (통권 36호)

---

2016년 12월 인쇄  
2016년 12월 발행

발행처 강릉원주대학교 자연과학연구소  
(우) 25457 강원도 강릉시 죽헌길 7  
T +82-33-640-2637 F +82-33-640-2264  
H <http://knusun.gwnu.ac.kr/~rins>

인쇄 성원인쇄문화사 (033-652-6373)  
강원도 강릉시 성덕포남로 188

---

